RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

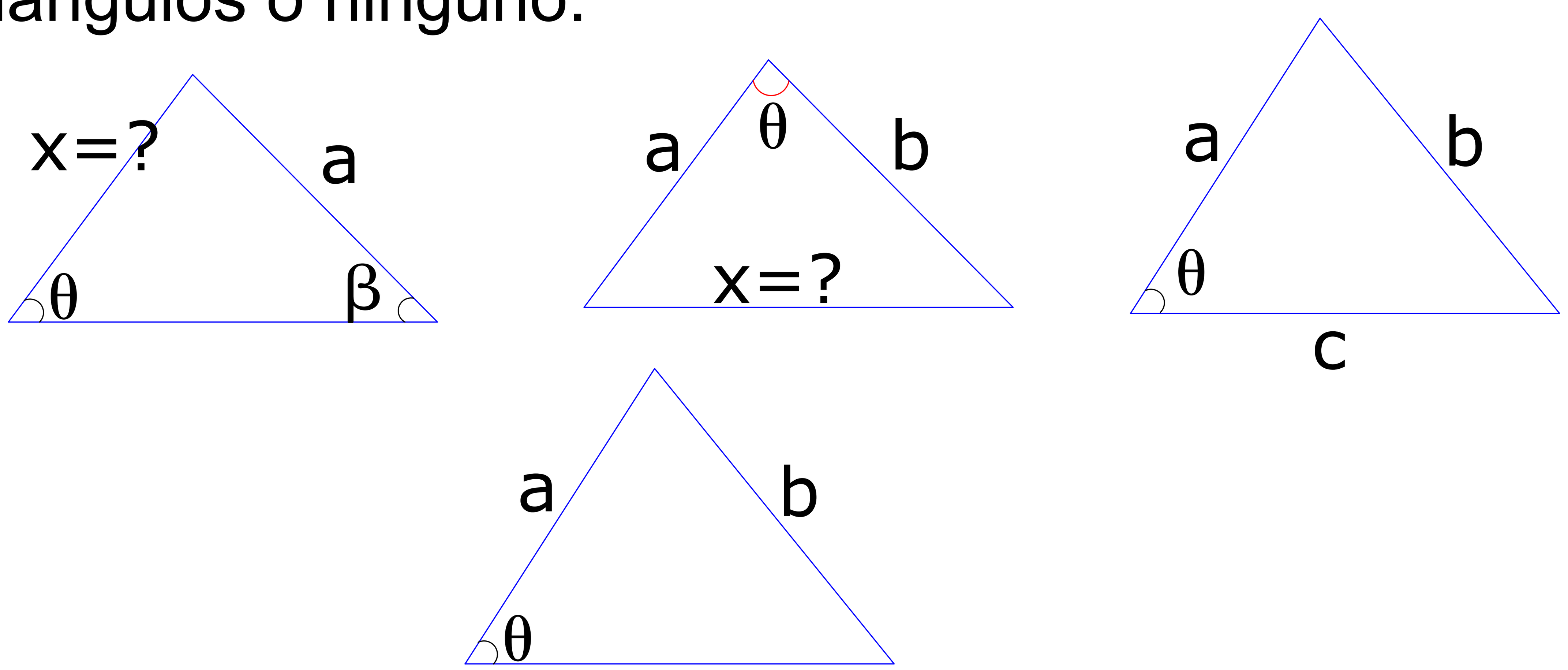
Triángulos oblicuángulos son aquellos que no son triángulos rectángulos, ya se ha mencionado que para resolver un triángulo se tienen que conocer tres de sus elementos necesariamente uno de ellos no angular. Para la resolución de triángulos oblicuángulos analizaremos cuatro casos (según los datos).

Caso 1: cuando se conocen dos ángulos y un lado.

Caso 2: cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

Caso 3: cuando se conocen tres lados.

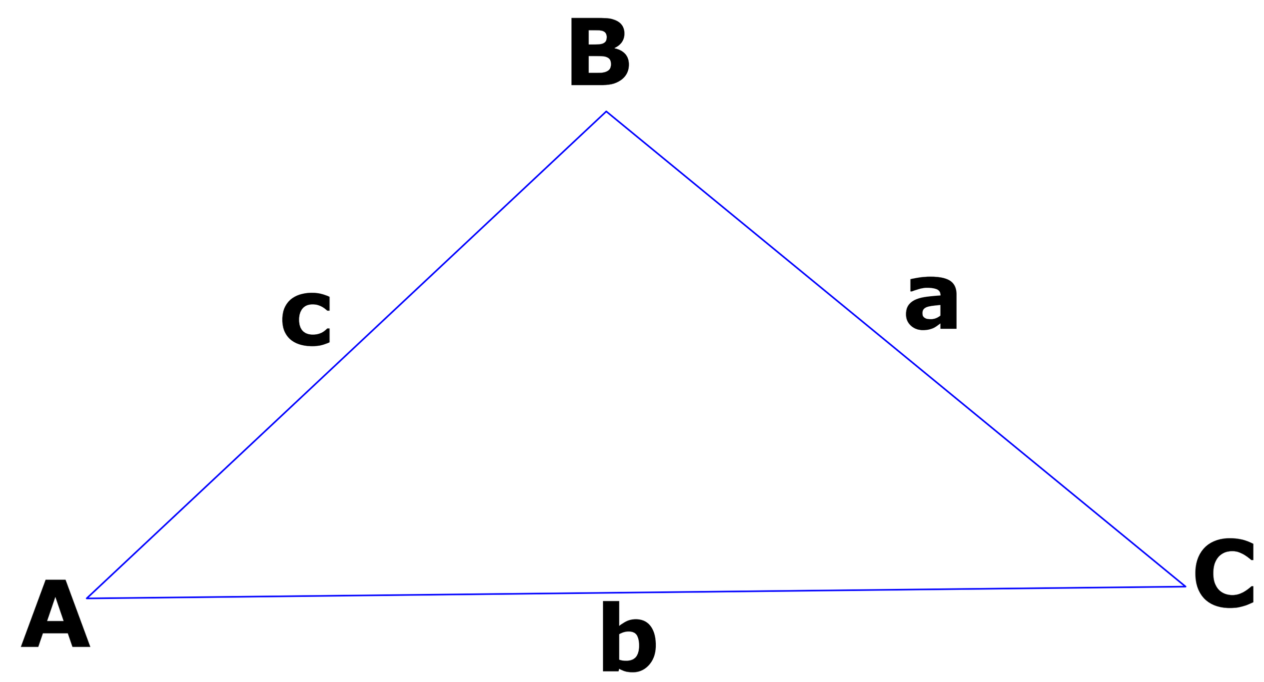
Caso 4: cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Este caso también se conoce como “caso ambiguo” ya que puede haber uno o dos triángulos o ninguno.



Para la resolución de triángulos es necesario saber las siguientes leyes:

LEY DE SENOS

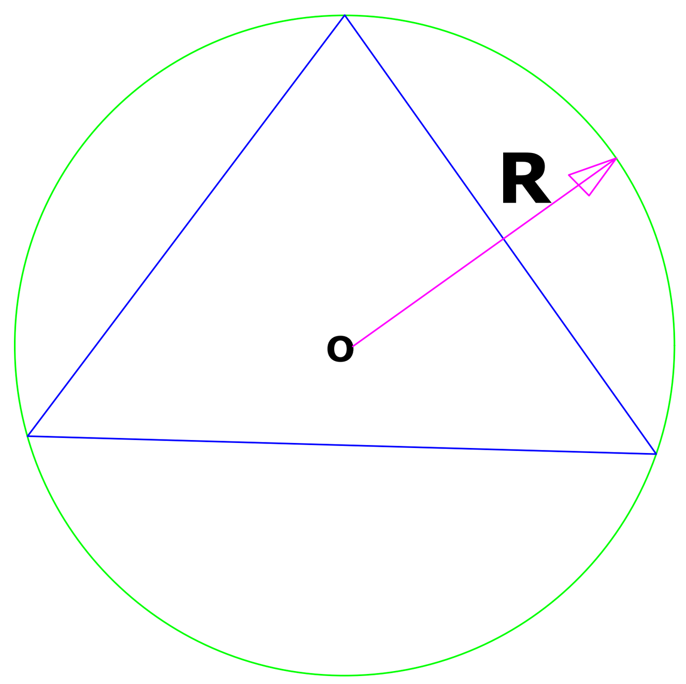
“En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos”

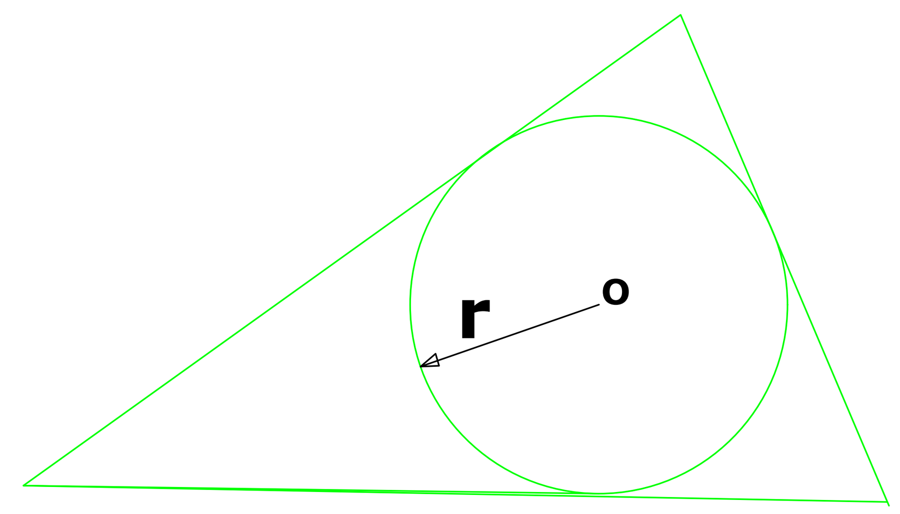


$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} = 2R$$

R:circunradio

Para tener en cuenta:

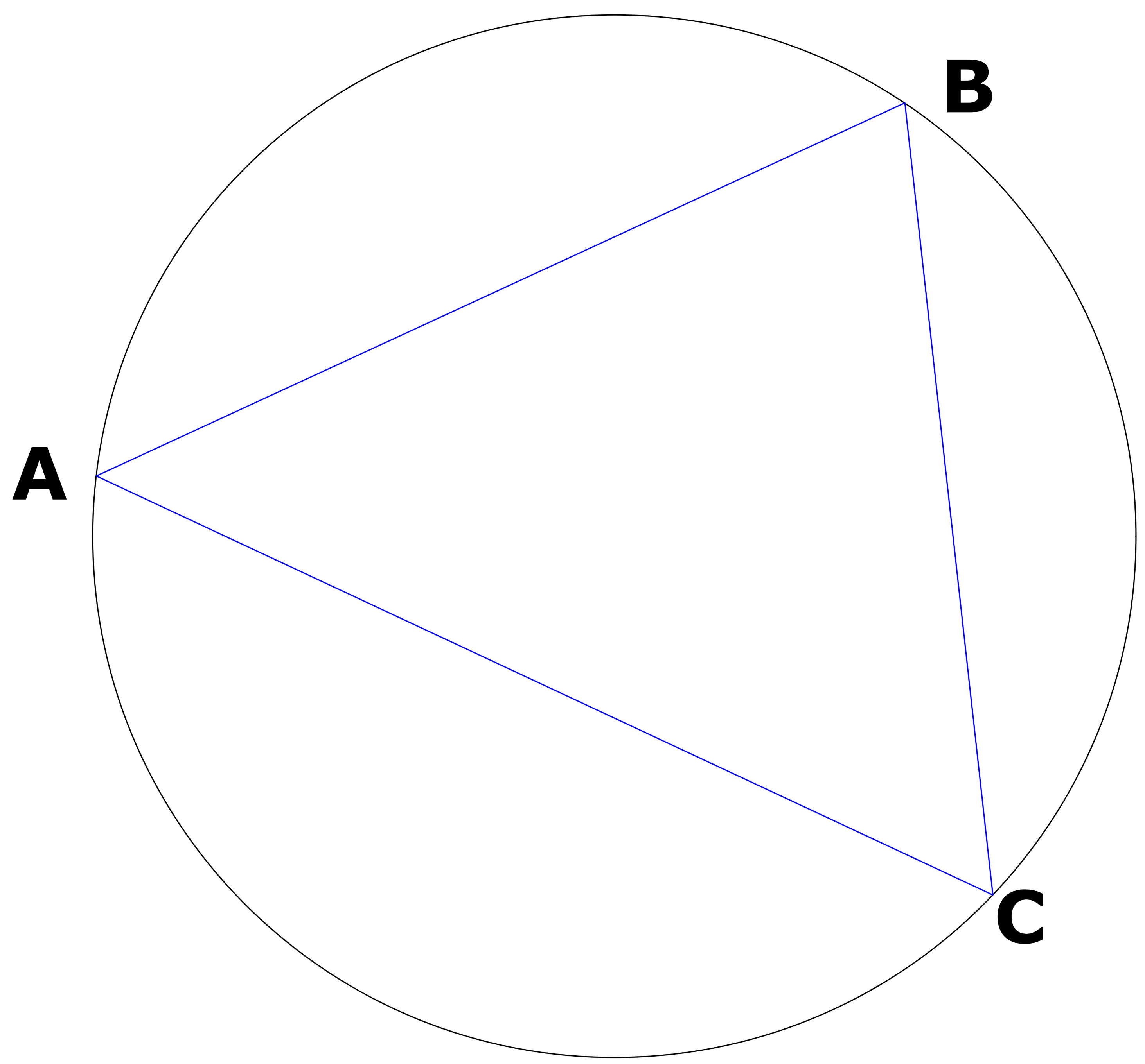


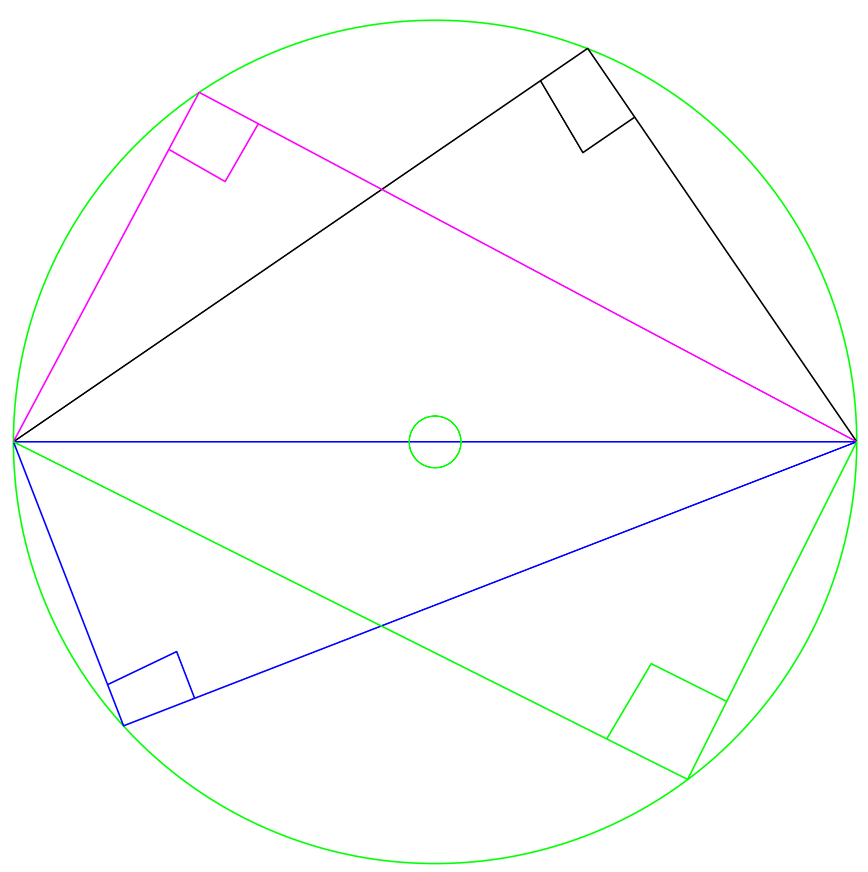


R: circunradio **r: inradio**

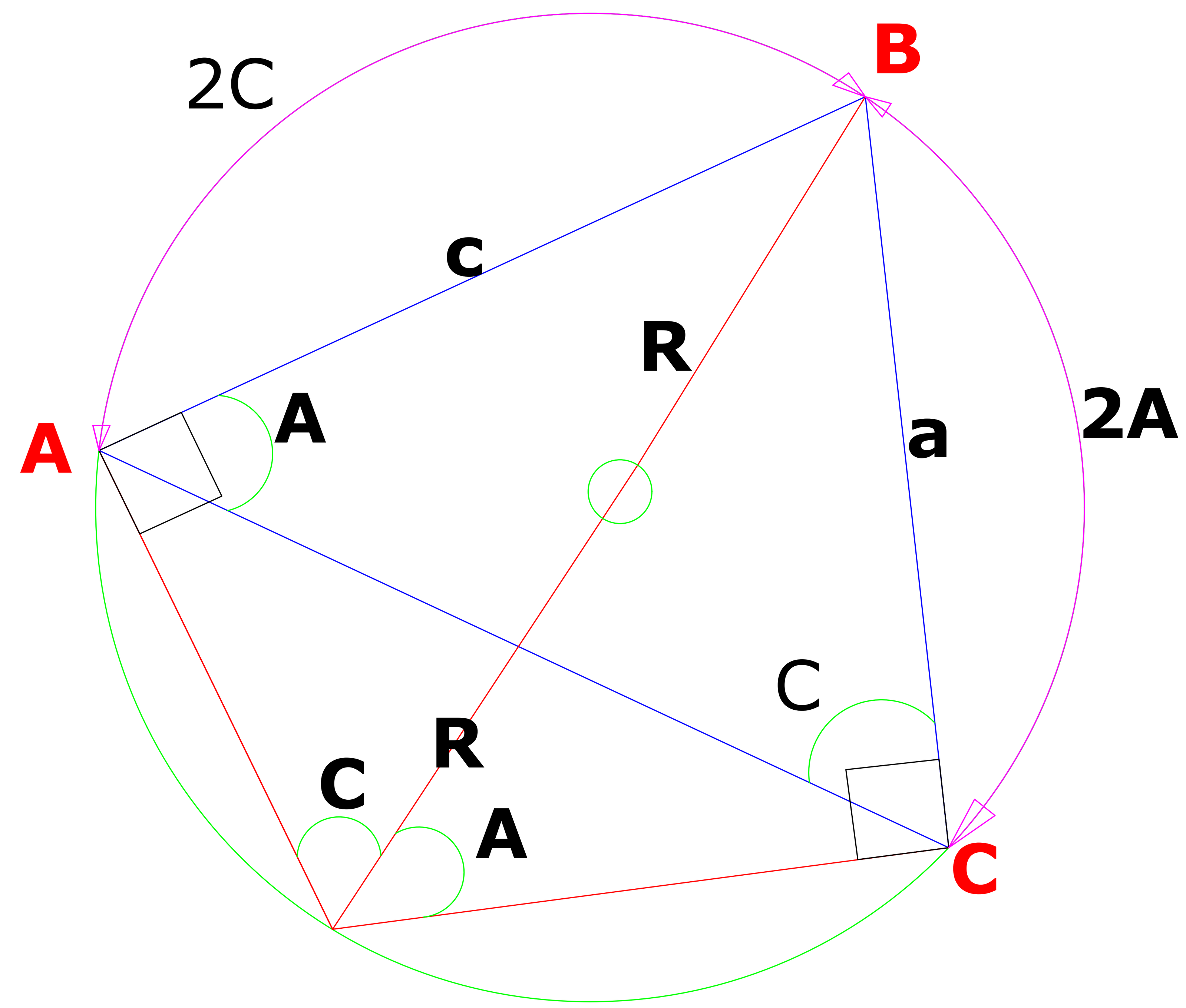
Demostración:

Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia tal como se observa en la figura.





DEMOSTRACIÓN



$$\text{SenA}=\frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{SenA}}=2R$$

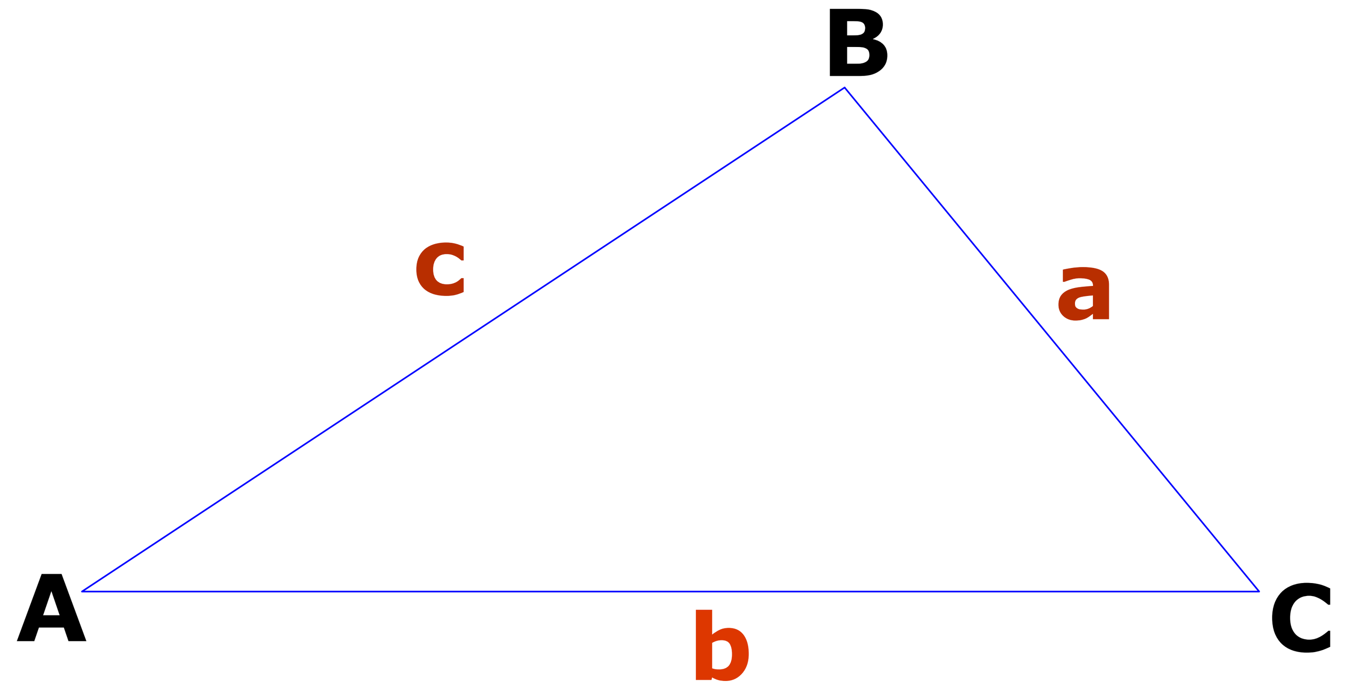
$$\text{SenC}=\frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{SenC}}=2R$$

$$\text{SenB}=\frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\text{SenB}}=2R$$

$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}}=\frac{b}{\text{SenB}}=\frac{c}{\text{SenC}}=2R}$$

LEY DE COSENO

“En todo triángulo la medida de cualesquiera de sus lados al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que estos forman".



$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bcCosA}$$

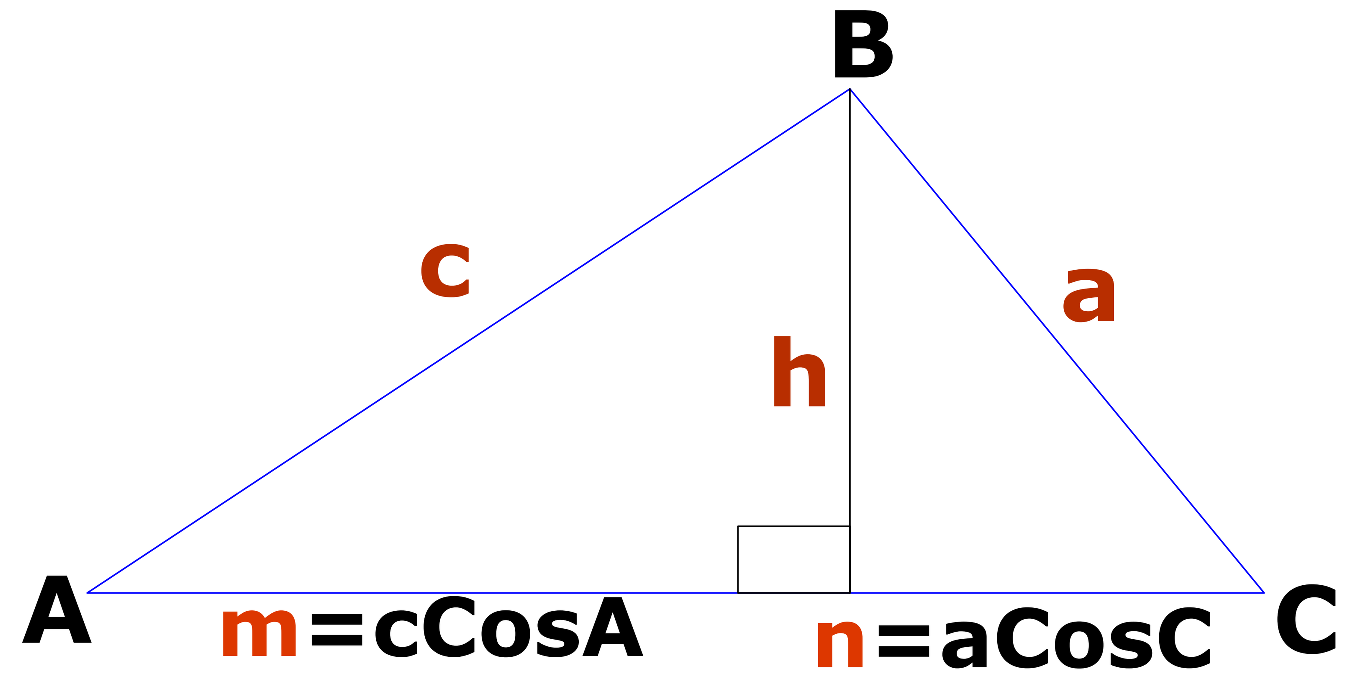
De la Ley de Cosenos se deduce:

$$\Rightarrow CosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow CosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow CosC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

DEMOSTRACIÓN



$$b=cCosA+aCosC \Rightarrow b^2=bcCosA+baCosC$$

$$a=cCosB+bCosC \Rightarrow a^2=acCosB+baCosC \quad (-)$$

$$c=aCosB+bCosA \Rightarrow c^2=acCosB+bcCosA \quad (-)$$

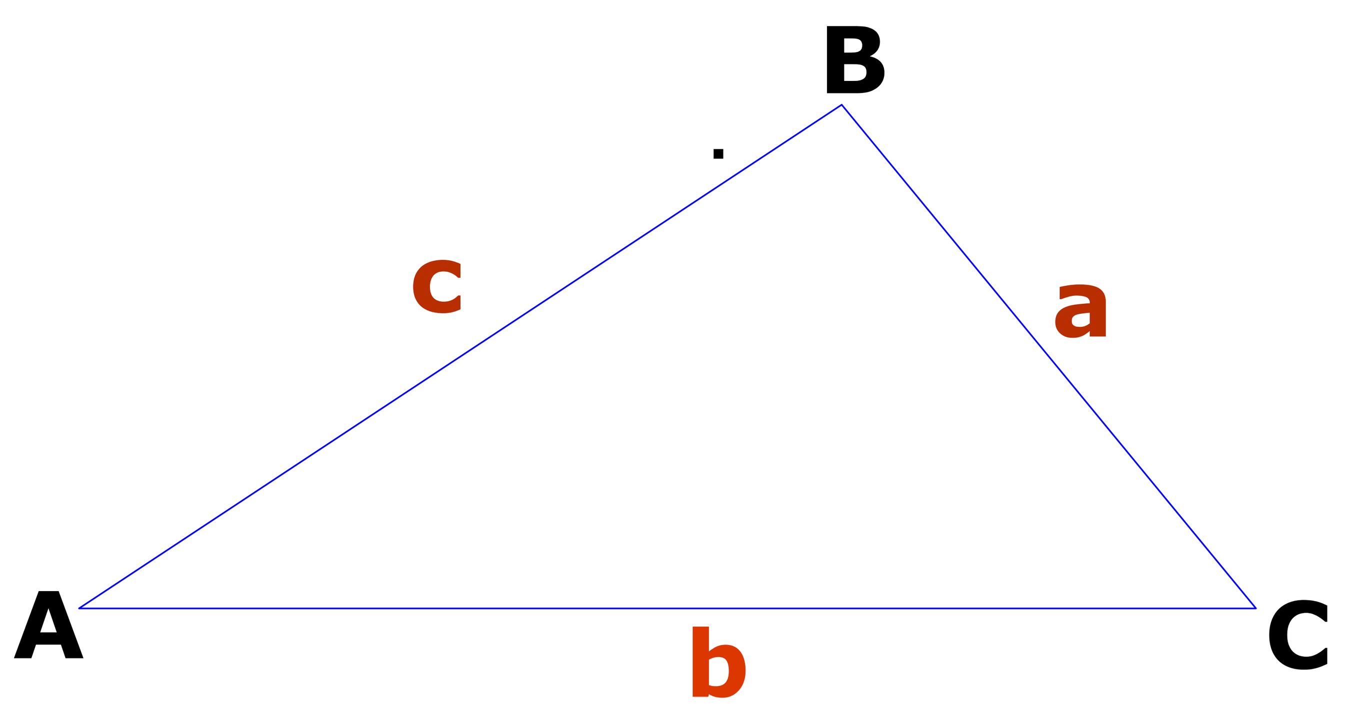
$$\Rightarrow b^2-a^2-c^2=-2acCosB \Rightarrow b^2=a^2+c^2-2acCosB$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bcCosA$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2abCosC$$

TEROREMA DE LAS PROYECCIONES

"En todo triángulo, la longitud de un lado es igual a la suma de los productos de cada una de las otras dos longitudes con el Coseno del ángulo que forman con el primer lado"



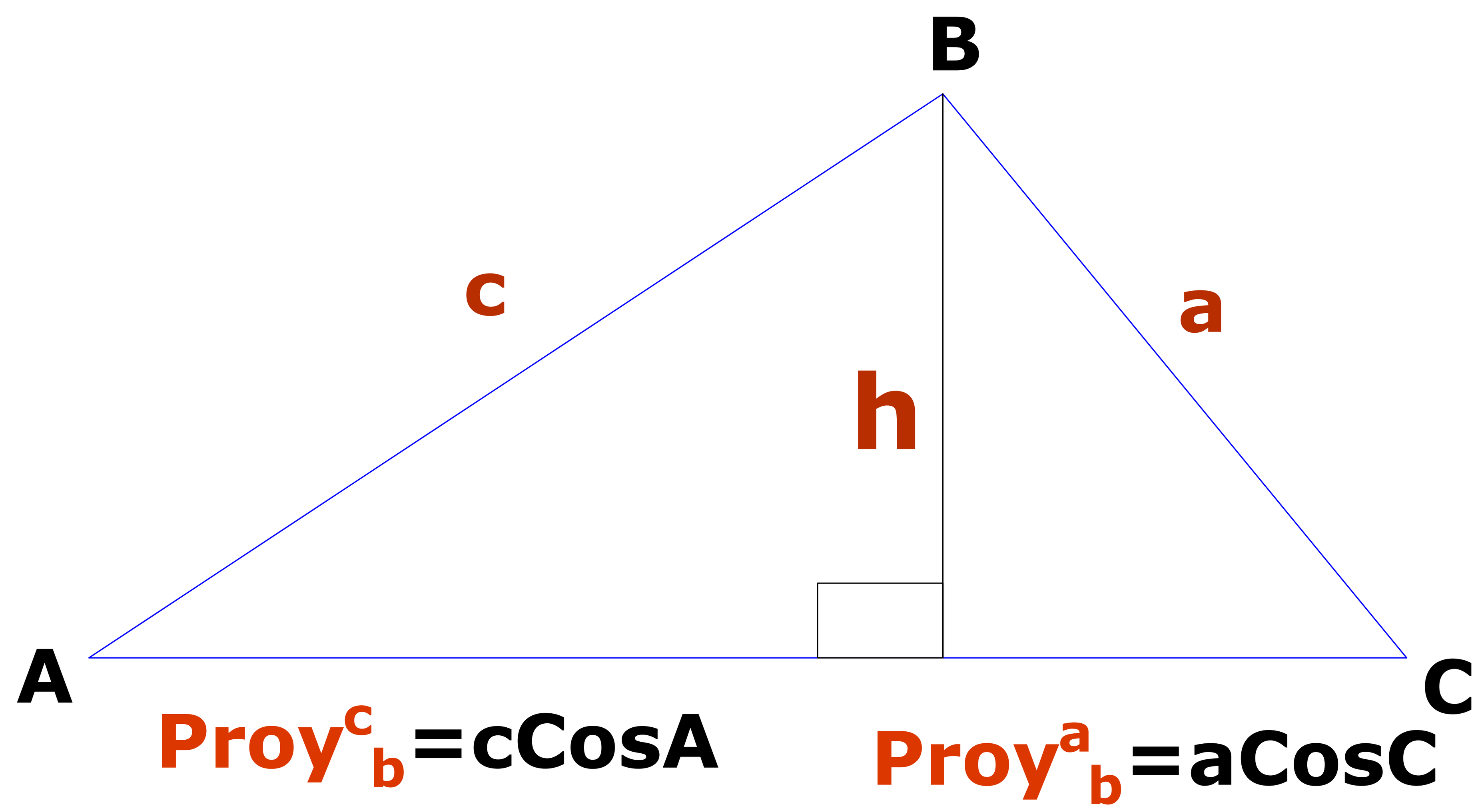
$$b = Proy^c_b + Proy^a_b$$

$$b = cCosA + aCosC$$

$$\Rightarrow a = bCosC + cCosB$$

$$\Rightarrow c = bCosA + aCosB$$

DEMOSTRACIÓN



$$b = Proy^c_b + Proy^a_b$$

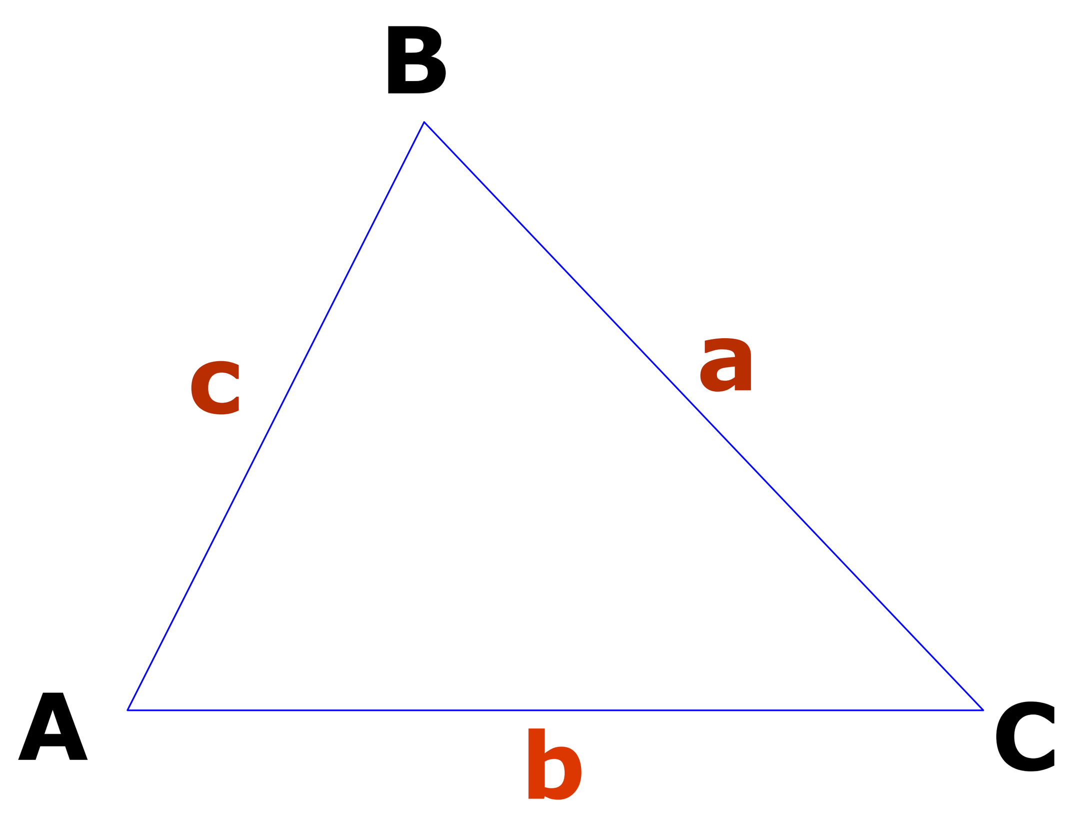
$$b = cCosA + aCosC$$

$$\Rightarrow a = bCosC + cCosB$$

$$\Rightarrow c = bCosA + aCosB$$

TERoREMA DE LAS TANGENTES

"En todo triángulo se cumple que la suma de longitudes de dos de sus lados, es a su diferencia; como la Tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados, es a la Tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos".



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{Tan}((A+B)/2)}{\text{Tan}((A-B)/2)}$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{b-c} = \frac{\text{Tan}((B+C)/2)}{\text{Tan}((B-C)/2)}$$

$$\Rightarrow \frac{c+a}{c-a} = \frac{\text{Tan}((C+A)/2)}{\text{Tan}((C-A)/2)}$$

DEMOSTRACIÓN

$$\frac{a}{\text{SenA}} = \frac{b}{\text{SenB}} = \frac{c}{\text{SenC}} = 2R = K$$

$$\begin{array}{l} a = k\text{SenA} \\ b = k\text{SenB} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = k(\text{SenA} + \text{SenB}) \\ a - b = k(\text{SenA} - \text{SenB}) \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{SenA} + \text{SenB}}{\text{SenA} - \text{SenB}}$$

Transformaciones trigonométricas
S + S = 2SC; S - S = 2CS

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\text{Sen}(A+B)/2\text{Cos}(A-B)/2}{2\text{Cos}(A+B)/2\text{Sen}(A-B)/2}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{Sen}(A+B)/2}{\text{Cos}(A+B)/2} \cdot \frac{\text{Cos}(A-B)/2}{\text{Sen}(A-B)/2}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \text{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{Ctg}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{Ctg}\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1/\text{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{Tan}((A+B)/2)}{\text{Tan}((A-B)/2)}$$