INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

René Descartes

René Descartes (1596 -1650) matemático, filósofo y físico francés, fue uno de los creadores de la geometría analítica disciplina que combina fundamentos del álgebra y la geometría. Dicha ciencia ofrece un sistema de referencia ortogonal, es decir, dos ejes perpendiculares graduados, usados para la realización de cálculos matemáticos.
La idea es asociar a los puntos del plano una abscisa y una ordenada y luego traducir los datos geométricos en una ecuación; fue sin duda muy trascendental, tanto así que esta concepción no tardó en propagarse hacia toda la geometría, mucho más allá de lo que había imaginado Descartes, quien solo veía en ella un aspecto secundario.

APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

La parábola:

1) Al arrojar al aire cualquier tipo de proyectil
2) Los puentes colgantes.
3)Si rebotas algo en la pared interna de una, la nueva dirección apunta al foco. Esto se usa en todos los faros de los coches y reflectores.

Elipse:

1) Describe el movimiento de los planetas.
2) En Monterrey existe algo que se llama la cámara de los susurros.
La parábola aparece en muchas ramas de las ciencias aplicadas, debido a que las gráficas de ecuaciones cuadráticas son parábolas. Por ejemplo, la trayectoria ideal del movimiento de los cuerpos bajo la influencia de lagravedad.

APLICACIONES PRÁCTICAS

Las aplicaciones prácticas son muchas: las antenas satelitales y radiotelescopios aprovechan el principio concentrando señales recibidas desde un emisor lejano en un receptor colocado en la posición del foco.
La concentración de la radiación solar en un punto, mediante un reflector parabólico tiene su aplicación en pequeñas cocinas solares y grandes centrales captadoras de energía solar.
Entre otras aplicaciones como:
Los puentes colgantes
Las antenas parabólicas
La observación astronómica.

HIPÉRBOLA

Una hipérbola es una cónica, una curva de dos ramas obtenida al cortar un cono recto por un plano oblicuo al eje de simetría, con ángulo menor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.

ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

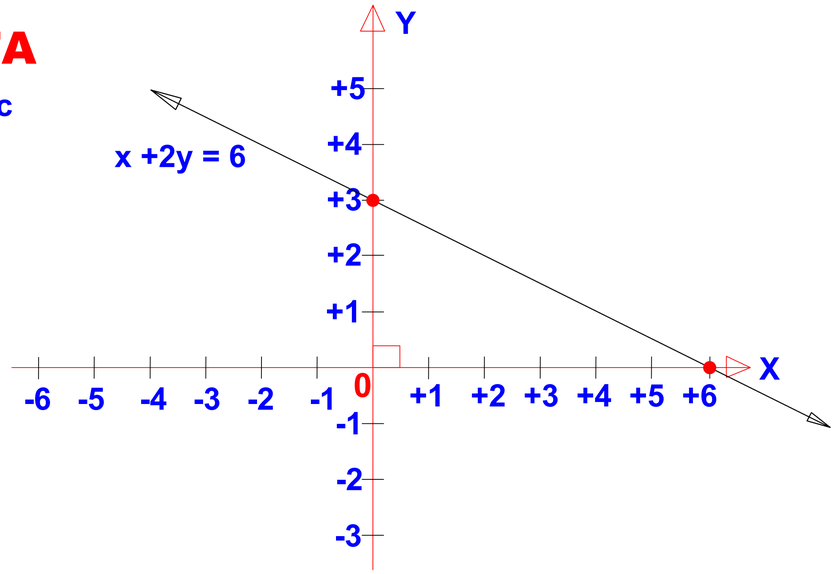
La geometría estudia las figuras geométricas y obtiene sus ecuaciones básicas, como son:

Las rectas se describen mediante la fórmula $ax + by = c$.
Los círculos se describen mediante la fórmula $x^2 + y^2 = 4$.
Las hipérbolas se describen mediante la fórmula $xy = 1$.
Las parábolas se describen mediante la fórmula $y = ax^2 + bx + c$.
Las elipses se describen mediante la fórmula $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

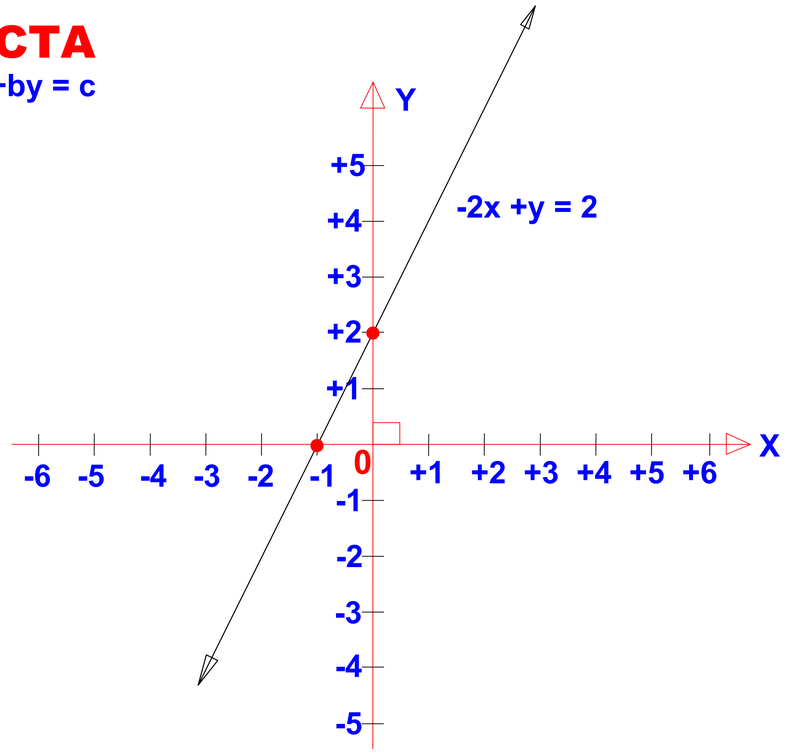
RECTA

$ax + by = c$



RECTA

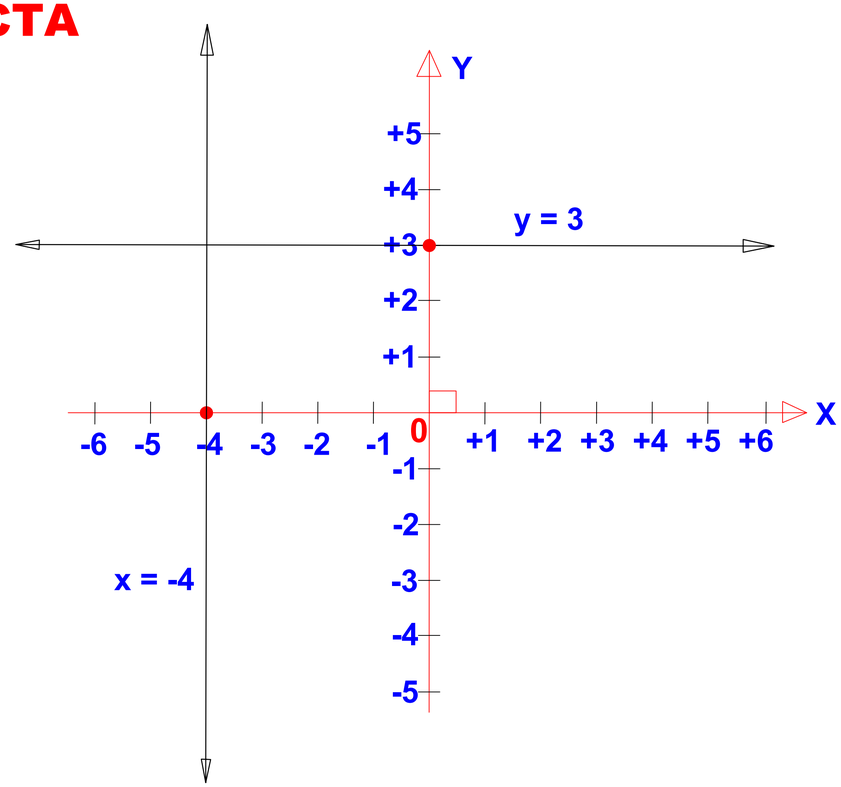
$-ax + by = c$



RECTA

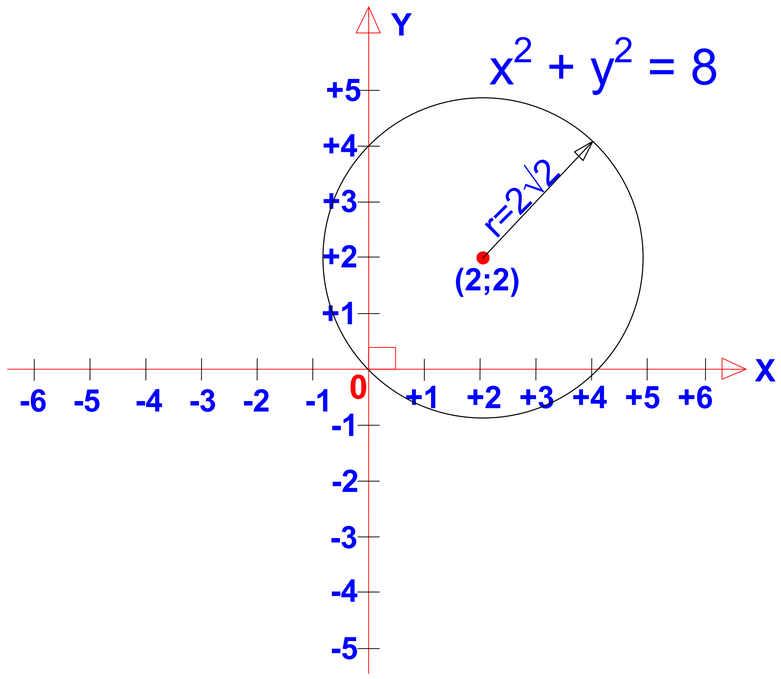
$y = c$

$x = c$



CÍRCULO

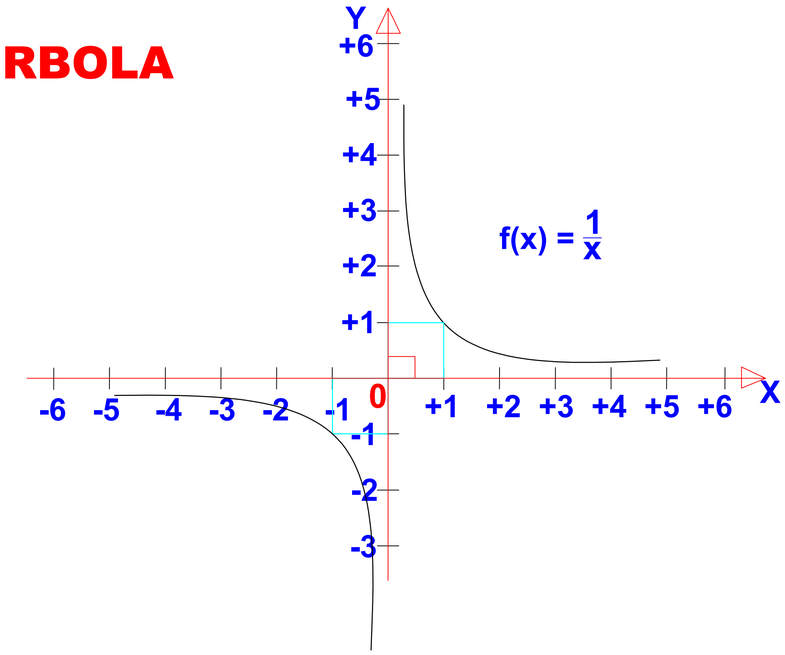
$x^2 + y^2 = r^2$



ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

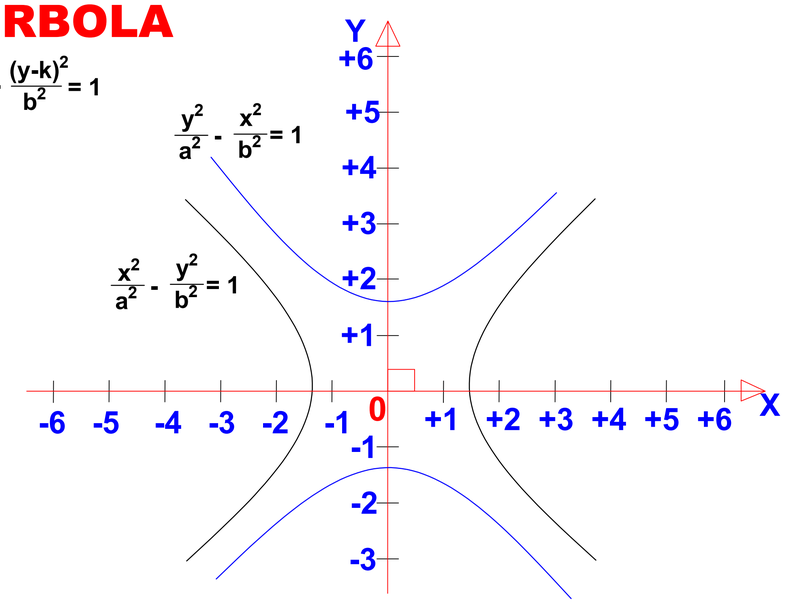
HIPÉRBOLA

$xy = 1$



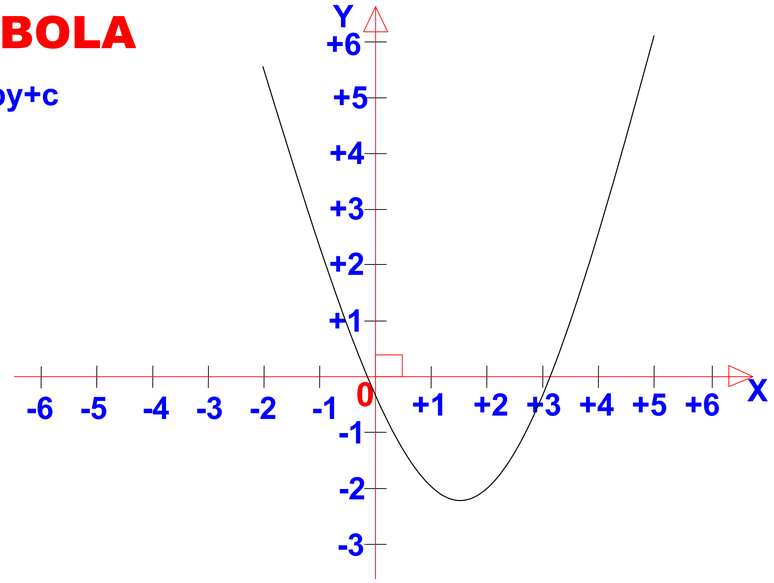
HIPÉRBOLA

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



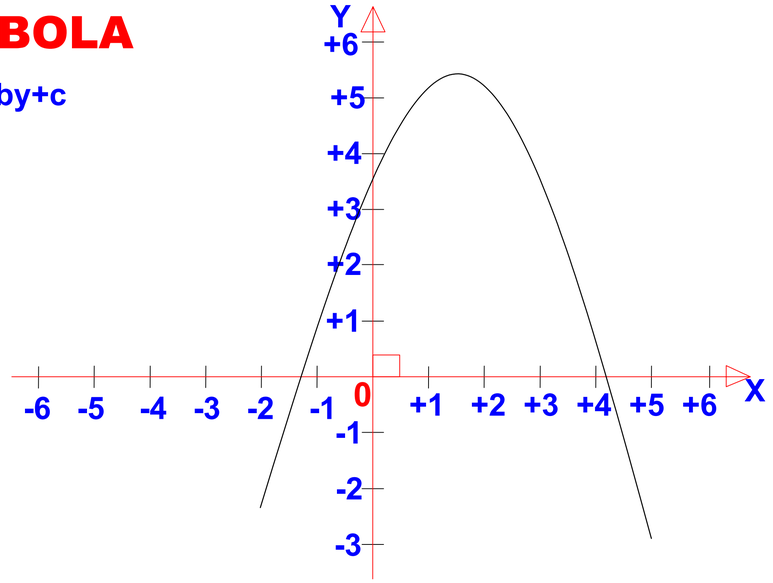
PARÁBOLA

$Y = ax^2+by+c$



PARÁBOLA

$Y = -ax^2+by+c$



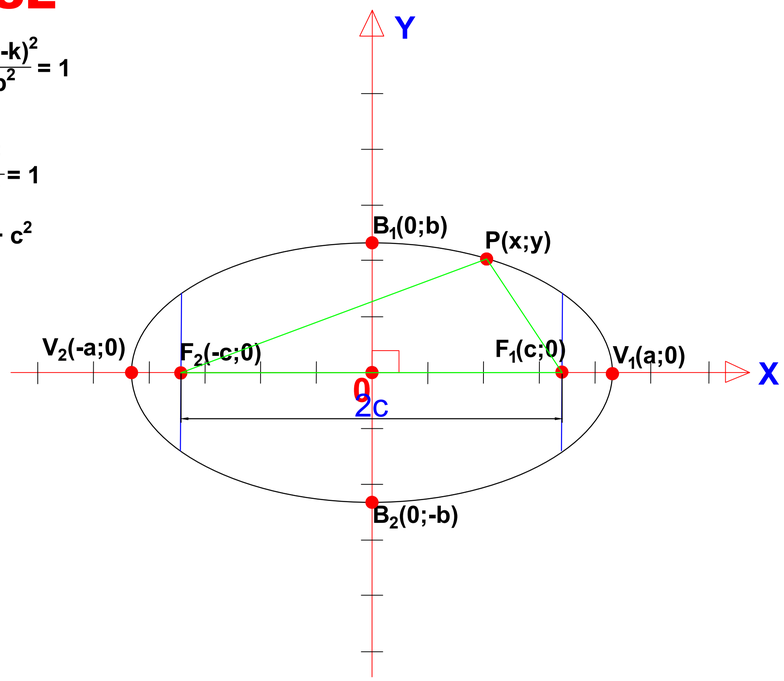
ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

ELIPSE

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

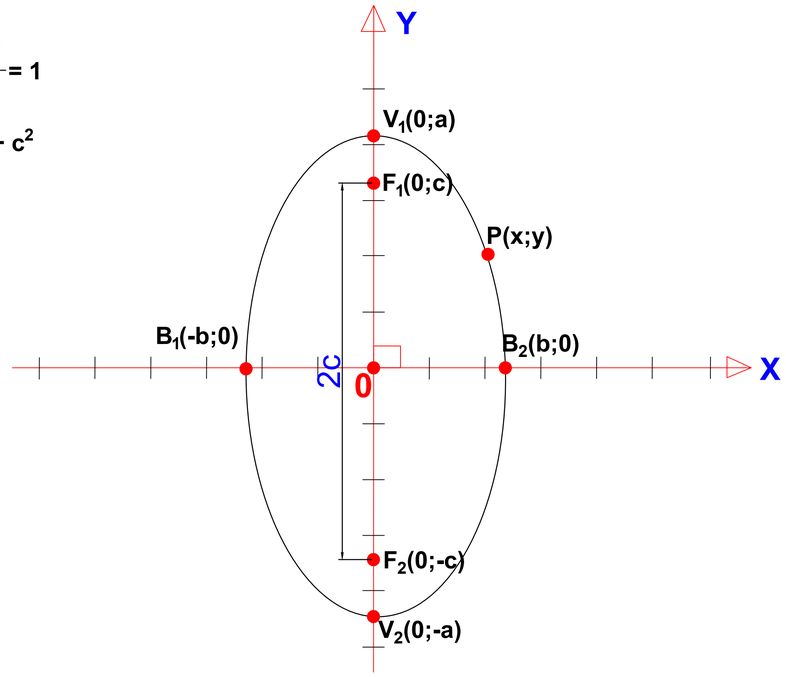
$$a^2=b^2+c^2$$



ELIPSE

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

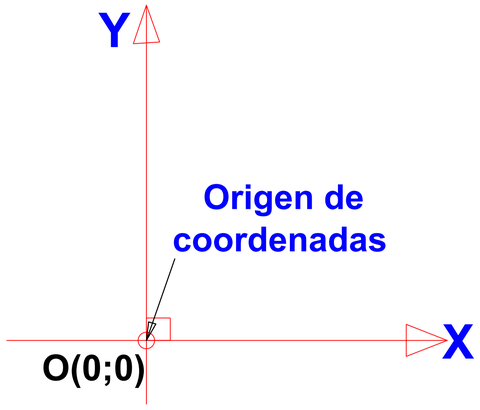
$$a^2=b^2+c^2$$

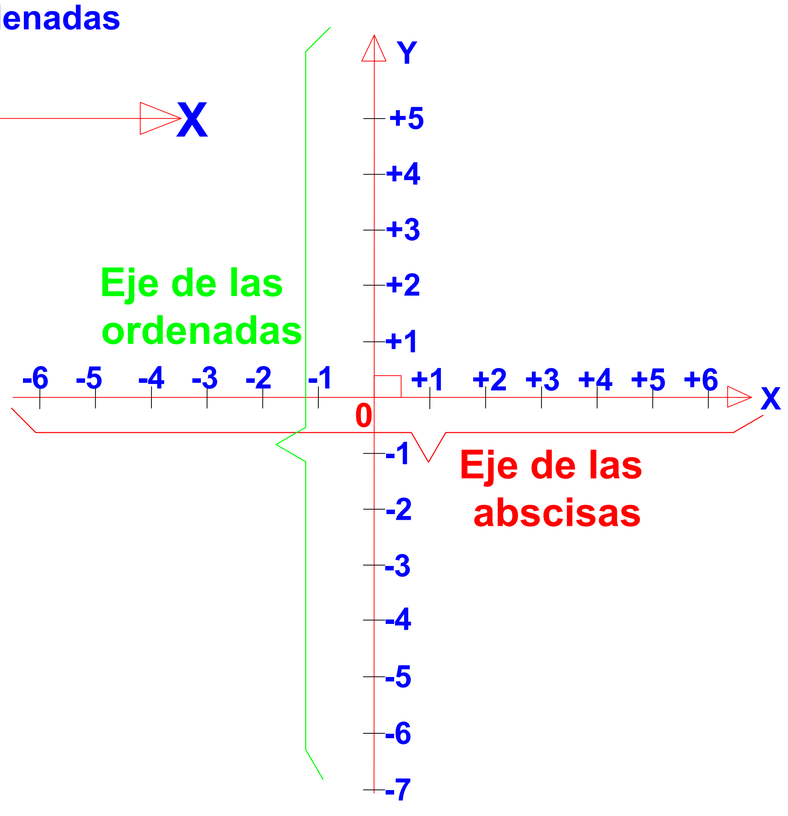


PLANO CARTESIANO

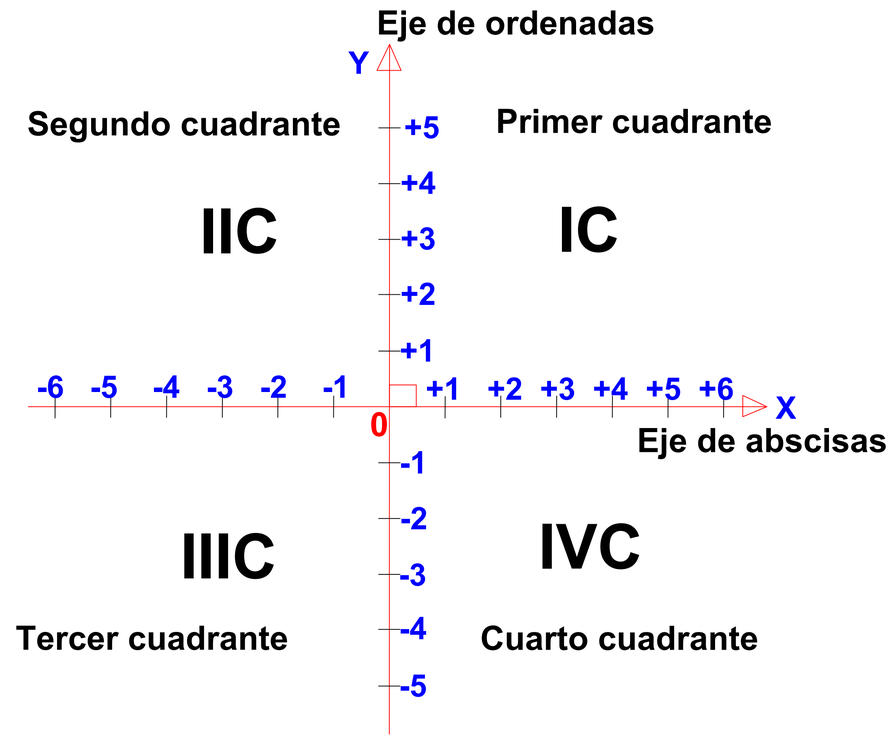
Llamado también plano de coordenadas: Es la intersección de dos rectas numéricas, perpendiculares entre sí en su origen (origen de coordenadas).

- A la recta horizontal se le denomina eje de abscisas (X).
- A la recta vertical se le denomina eje de ordenadas (Y).
- La intersección es el origen de coordenadas O (0; 0).
- El plano está dividido en cuatro regiones denominadas cuadrantes.





EL PLANO CARTESIANO Y LOS CUADRANTES



Recta horizontal: eje X (eje de las abscisas)
Recta vertical: eje Y (eje de las ordenadas)

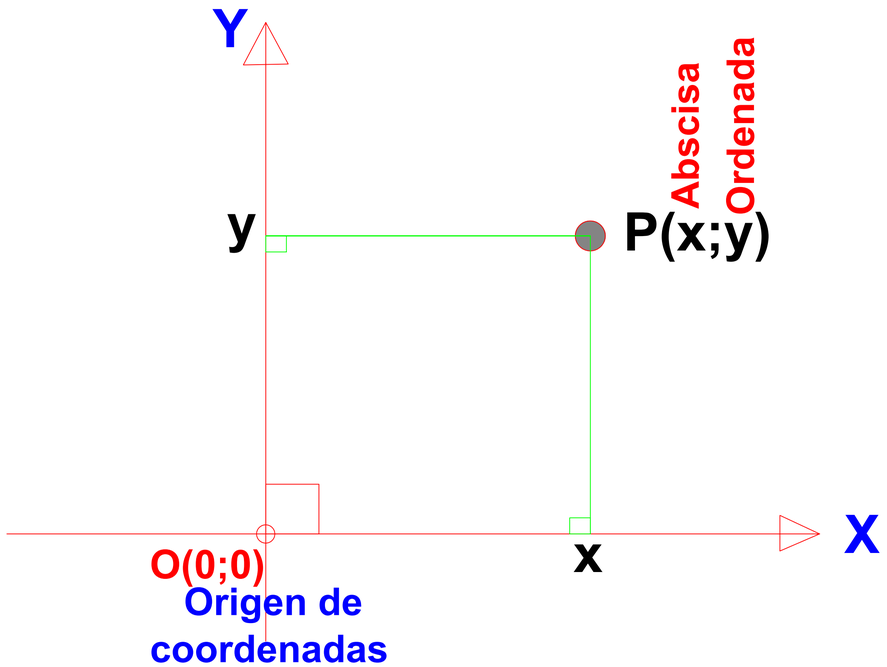
Par ordenado (x, y): Todo punto en el plano tiene dos números reales asociados a él.

$$(x;y)$$

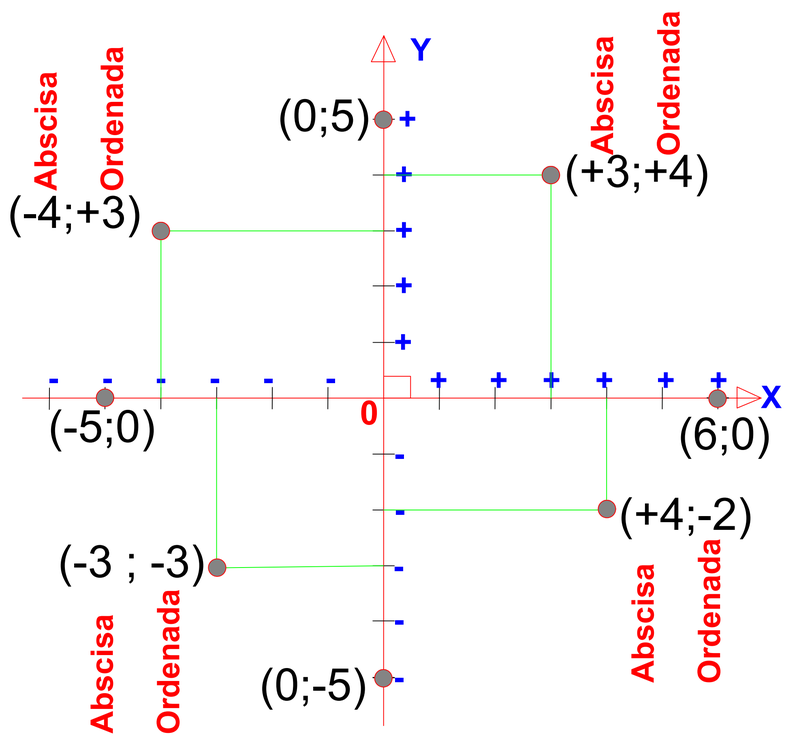
Primera componente (Abscisa) — **Segunda componente (ordenada)**

UBICACIÓN O LOCALIZACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

Podemos identificar en el plano cartesiano un punto P con el Par ordenado (x;y), donde x es la abscisa e y es la ordenada del punto P. (los valores de x e y se ubican trazando las perpendiculares desde P hasta los ejes X e Y, respectivamente)

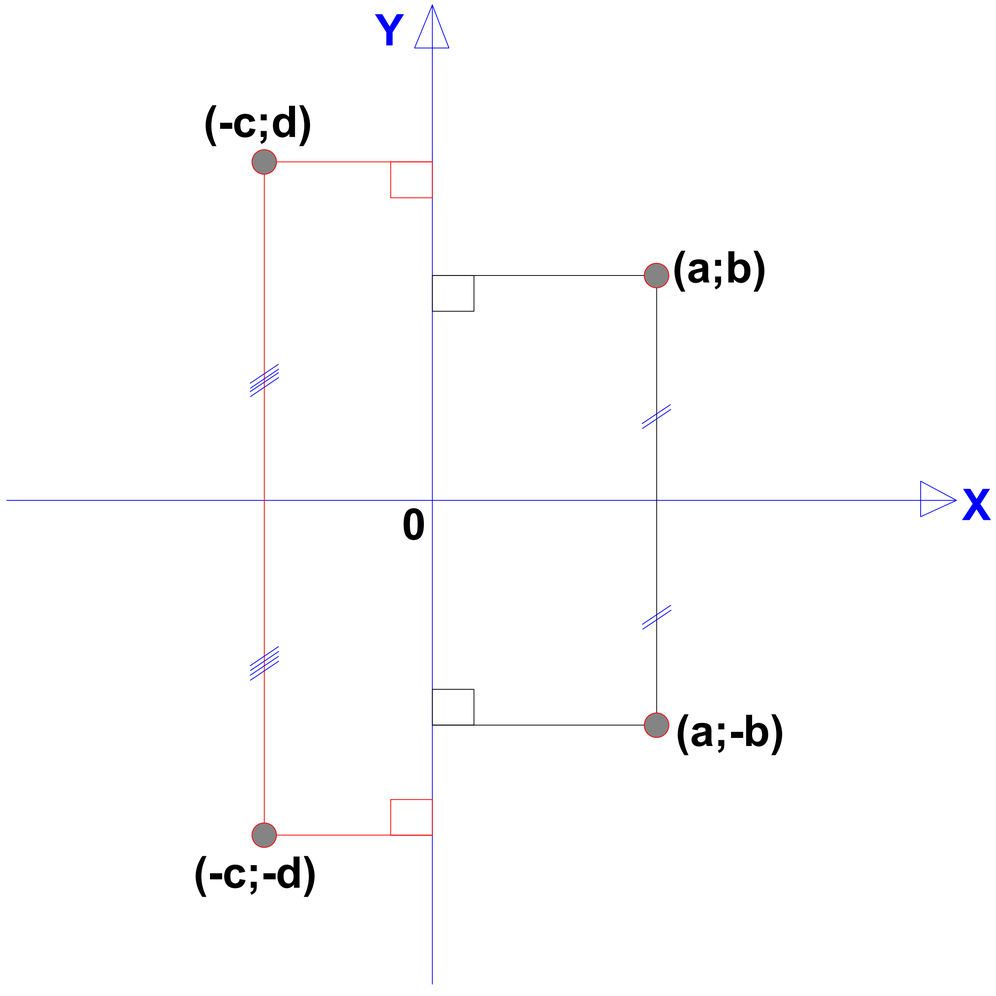


PUNTOS EN CADA CUADRANTE Y SEMIEJES

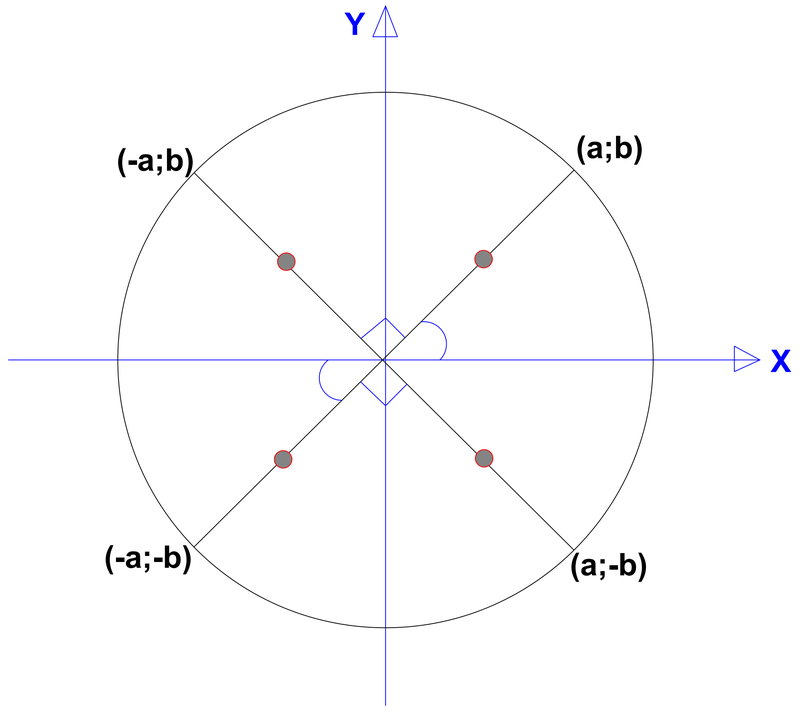


CASOS PARTICULARES DE UBICACIÓN DE UN PUNTO

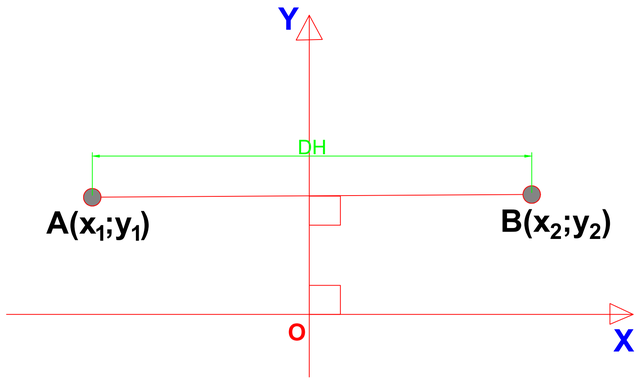
Respecto al eje de abscisas



TRANSPUESTA



DISTANCIA HORIZONTAL(DH)

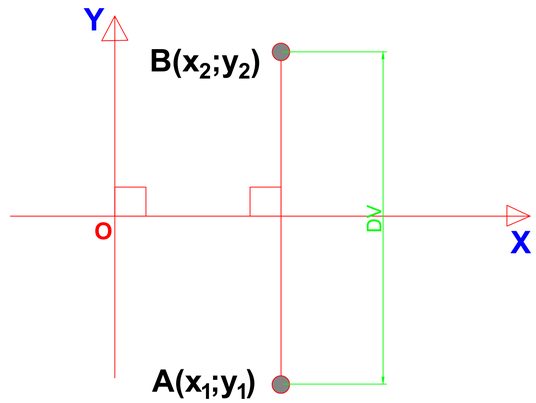


Se observa: $y_1 = y_2$ además: $x_2 > x_1$

Se define:

$$DH = |x_2 - x_1|$$

DISTANCIA VERTICAL(DV)

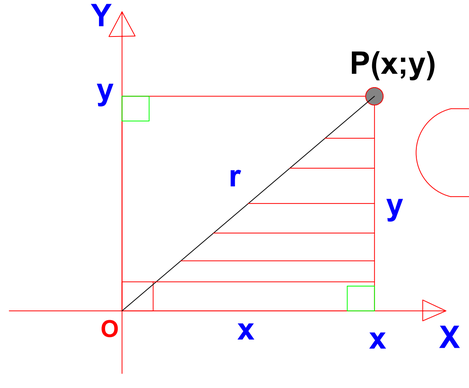


Se observa: $x_1 = x_2$ además: $y_2 > y_1$

Se define:

$$DV = |y_2 - y_1|$$

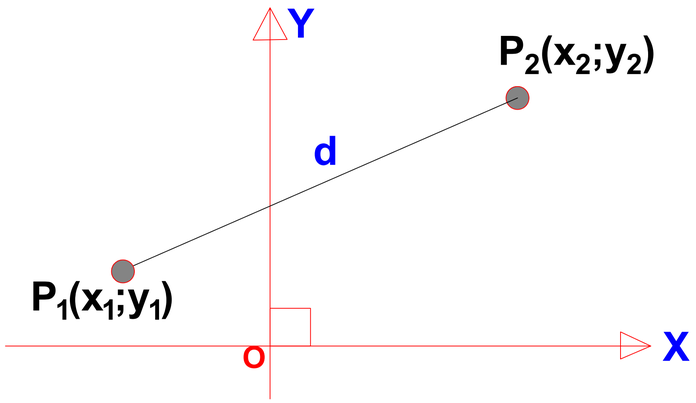
RADIO VECTOR (r). Es la distancia de un punto del plano cartesiano al origen de coordenadas y se le considera positivo.
El radio vector r del punto P(x;y) se calcula con la siguiente relación:

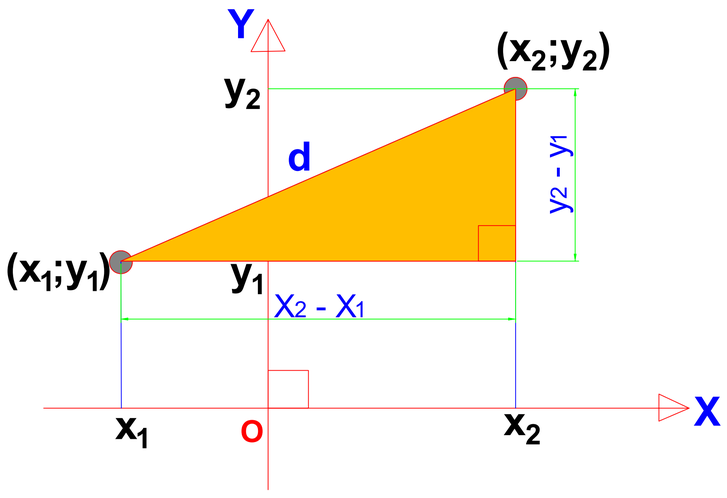


$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; r > 0$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia d entre dos puntos cualquiera $P_1(x_1, y_1)$y $P_2(x_2, y_2)$, se determina así:



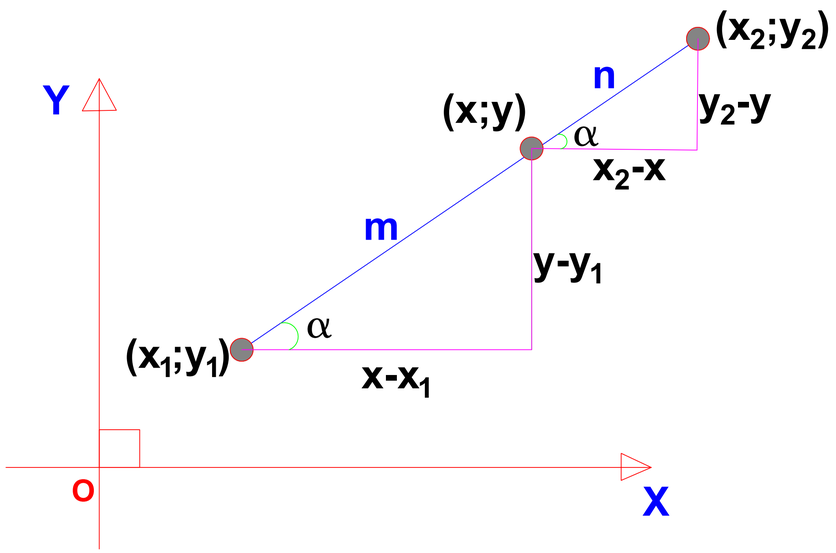


Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO SEGÚN UNA RAZÓN DADA



$$Cos\alpha = \frac{x - x_1}{m} \quad .....(1)$$

$$Cos\alpha = \frac{x_2 - x}{n} \quad .....(2)$$

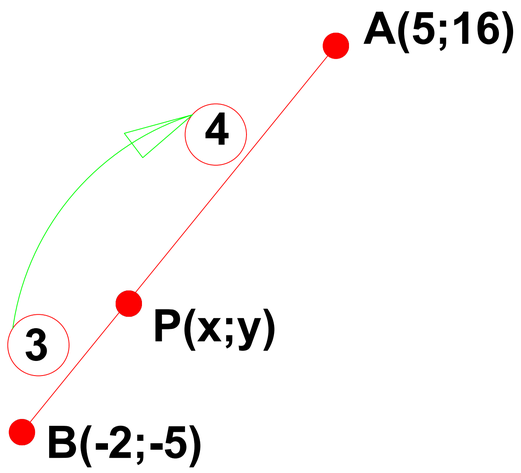
Dividimos (1) y (2) m.a.m

$$1 = \frac{\frac{x - x_1}{m}}{\frac{x_2 - x}{n}} = \frac{n(x-x_1)}{m(x_2-x)} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{x-x_1}{x_2-x} \Rightarrow r = \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow r = \frac{x-x_1}{x_2-x} \Rightarrow rx_2 - rx = x - x_1 \quad \text{(Idea despejar x)}$$

$$\Rightarrow rx_2 + x_1 = x + rx \Rightarrow rx_2 + x_1 = x(1+r)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{x1 + rx2}{1+ r}} \; ; \; \boxed{y = \frac{y1 + ry2}{1+ r}}$$



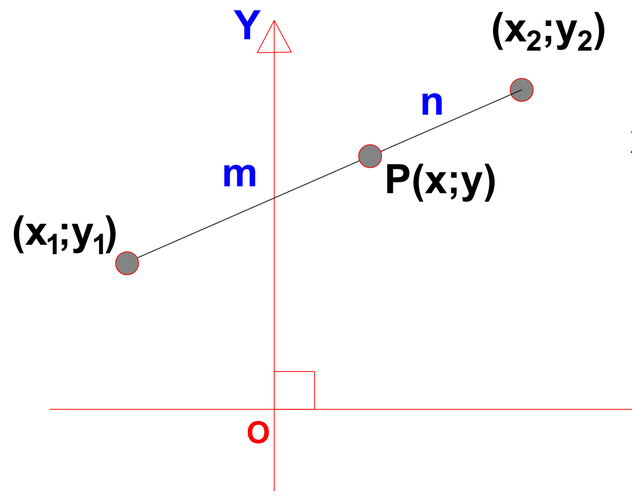
$$X=\frac{-2+(3/4)(5)}{1+3/4}=\frac{-8+15}{4+3}=1 \quad ;$$

$$r=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$y=\frac{-5+(3/4)(16)}{1+3/4}=\frac{-5+12}{7/4}=4 \quad ;$$

Rta: (1;4)

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO SEGÚN UNA RAZÓN DADA



$$x=\frac{nx_1+m\,x_2}{n+m}$$

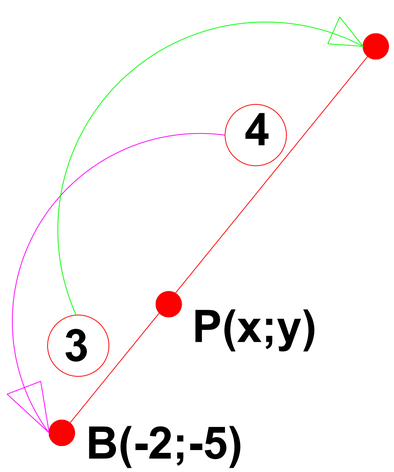
$$y=\frac{ny_1+m\,y_2}{n+m}$$

$$x=\frac{nx_1+m\,x_2}{n+m}$$

$$y=\frac{ny_1+m\,y_2}{n+m}$$

También podemos obtener de la forma siguiente:

$$(m+n)P(x;y)=n(x_1;y_1)+m(x_2;y_2)$$



7P(x;y)= 4(-2;-5) + 3(5;16)

7P(x;y) = (-8;-20) +(15;48)

7P(x;y) = (7;28)

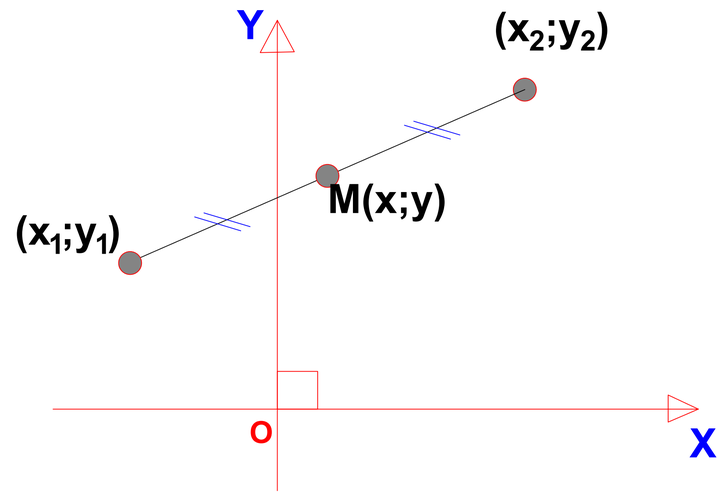
P(x;y) = (1;4)

(1;4)

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Sabiendo que:

$$\Rightarrow x=\frac{x1 + rx2}{1+ r} \; ; \; y=\frac{y1 + ry2}{1+ r}$$

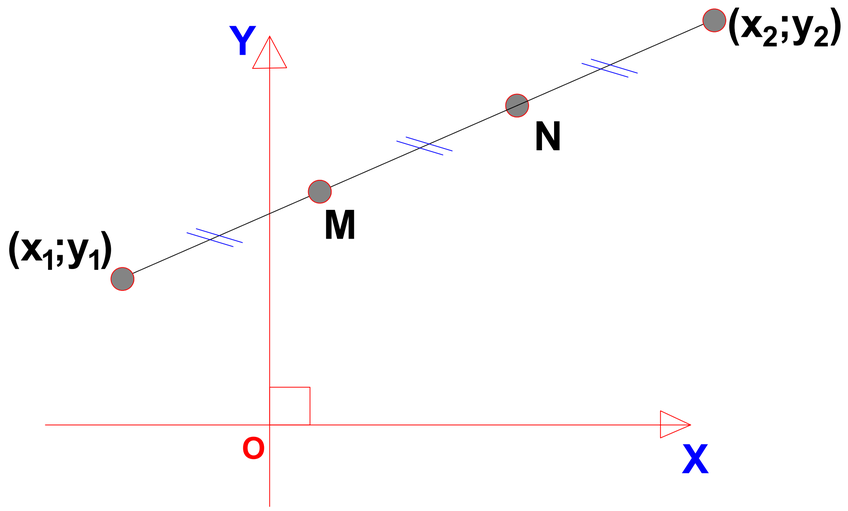


Si: r=1 ⇨

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

PUNTOS DE TRISECCIÓN DE UN SEGMENTO DE RECTA



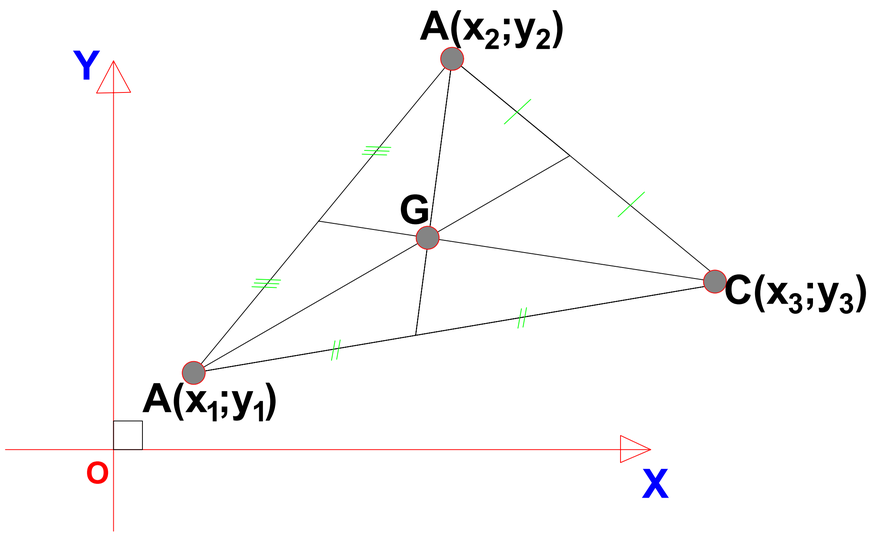
Para M, r = $\frac{1}{2}$ ⇨ $M(\frac{2x1 + x2}{3};\frac{2y1 + y2}{3})$

Para N, r = 2 ⇨ $N(\frac{x1 + 2x1}{3};\frac{y1 + 2y2}{3})$

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO(G)

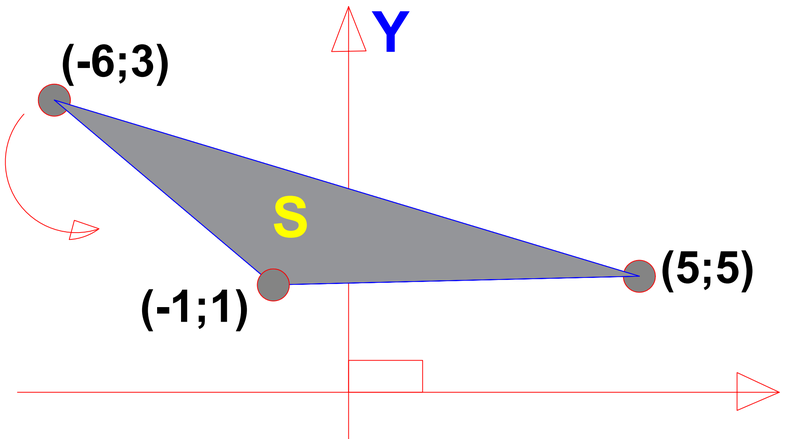
En el siguiente triángulo cuyos vértices son $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ y $C(x_3;y_3)$, veremos a continuación que las coordenadas del baricentro están dadas por:

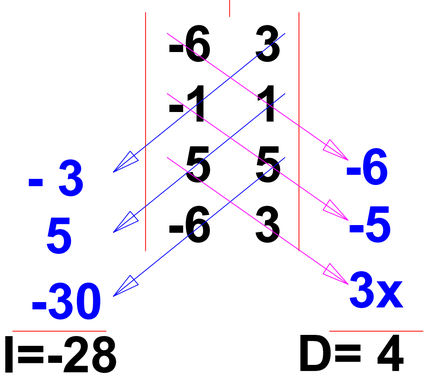
$$G(\frac{x1+x2+x3}{3};\frac{y1+y2+y3}{3})$$



CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Para calcular el área S de una región triangular se deben tener en cuenta los siguientes criterios del algoritmo.
- Es necesario conocer las coordenadas de los vértices del triángulo.
- A partir de la gráfica, formamos un arreglo rectangular desde uno de los vértices. En este caso, asumimos el vértice (-6;3)
- Luego, colocamos las coordenadas de los otros vértices siguiendo en sentido antihorario hasta cerrar la figura y volver a colocar el primer vértice escogido.
- Finalmente, procederemos como a continuamos se indica.



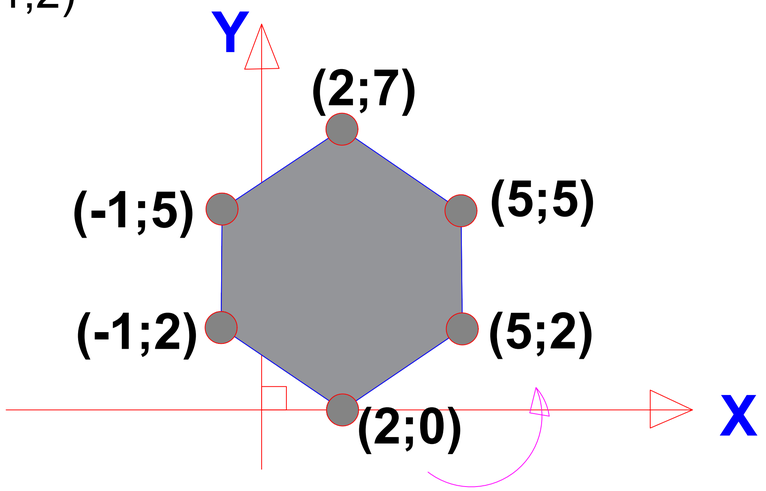


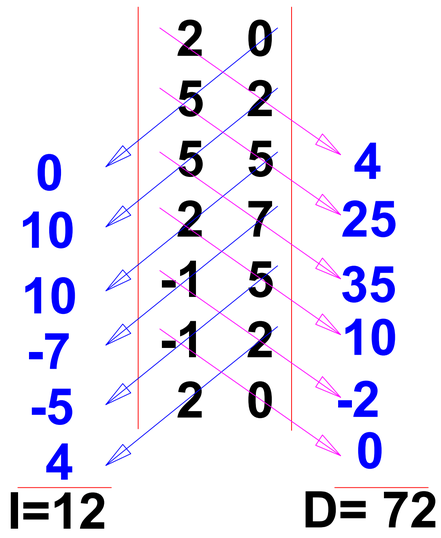
$$\text{ÁREA} = \frac{D - I}{2}$$

$$S = \frac{4 - (-28)}{2}$$

Rta: $S = 16u^2$

Determina el área del hexágono, cuyos vértices son los puntos A(2;0), B(5;2), C(5;5), D(2;7), E(-1;5) y F(-1;2)





$$\text{ÁREA} = \frac{D - I}{2}$$

$$S = \frac{72 - 12}{2}$$

Rta: $S = 30u^2$

PENDIENTE DE UNA RECTA

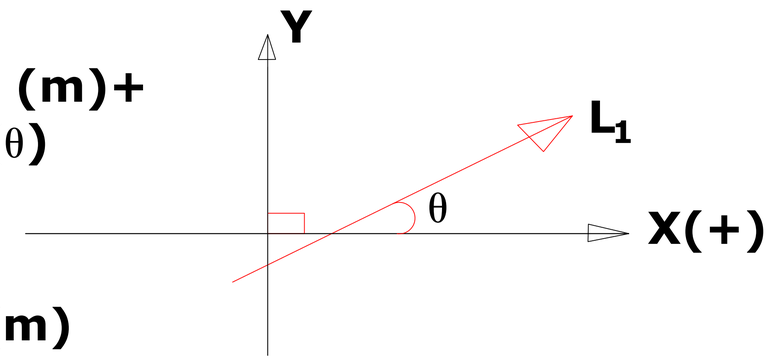
DEFINICIONES

Inclinación de una recta. Es el ángulo que una recta forma con el eje X positivo, el cual se representa con el símbolo θ, este ángulo se mide a partir del eje C y girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Pendiente de una recta. Se define como la tangente del ángulo de inclinación que tiene una recta y se representa con la letra m.

PENDIENTE: (m)+

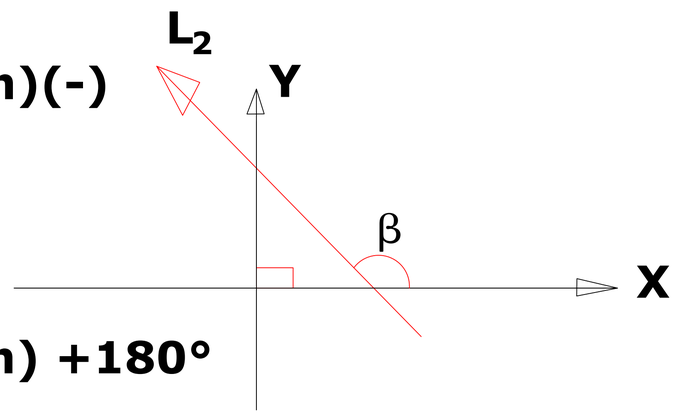
$$m = Tan(\theta)$$



$$\theta = \text{Arc } Tan(m)$$

PENDIENTE: (m)(-)

$$m = Tan(\beta)$$



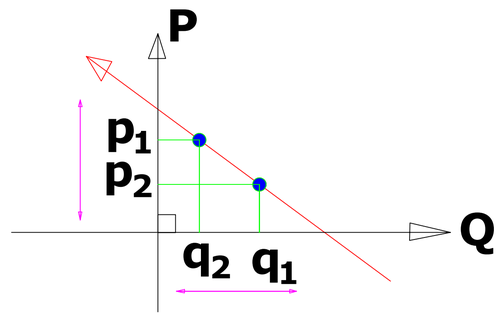
$$\beta = \text{Arc } Tan(m) + 180°$$

Observación

Si: $m = \frac{c}{0}$ ⇨$\theta = 90°$ (pendiente no existe)

Si: $m = 0$ ⇨$\theta = 180°$ (pendiente cero)

CURVA DE DEMANDA LINEAL (Oferta y Demanda)



En la práctica algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en un intervalo.

En el análisis económico sólo se toma la porción de las rectas lineales que se encuentran en el primer cuadrante, ya que la oferta, el precio y la demanda son cero o positivas.

Curva de demanda lineal

Caso I

Cuando la pendiente de la recta es negativa aumenta el precio y la cantidad de demanda disminuye y viceversa.

Caso II

Cuando la pendiente de la recta es cero el precio permanente constante, sin considerar que la demanda aumenta.

Caso III

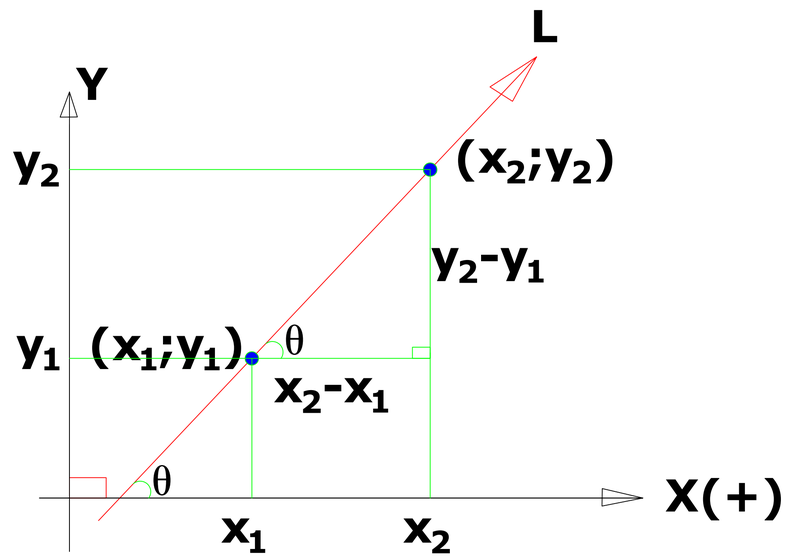
Cuando la pendiente de la recta no existe el precio aumenta y la cantidad de demanda permanece constante.

P: Precio

Q:Cantidad de demanda.

PENDIENTE DE UNA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

La pendiente de una recta puede ser calculada conociendo las coordenadas de dos puntos de dicha recta.



La PENDIENTE de la recta L es: (m)

$$m = \text{Tan}\theta = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

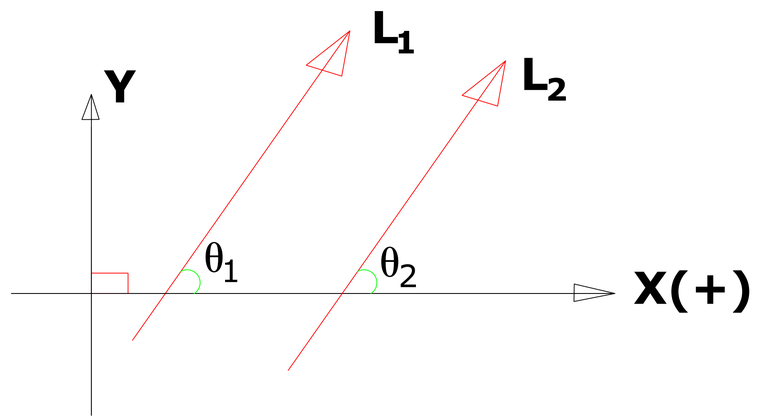
$$\boxed{m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}}$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO

Dos rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales y, por tanto, sus pendientes también.

$$m_1 = m_2$$

Se denota como L1//L2 para indicar que L1 es paralela a L2



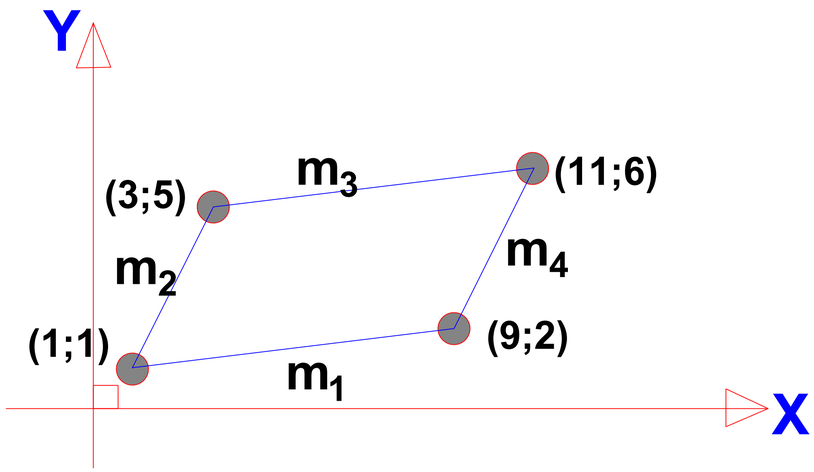
Si L1 //L2, entonces: $\theta_1=\theta_2$
Por ser correspondientes. Aplicamos la función tangente

$$\text{Tan}\theta_1=\text{Tan}\theta_2$$

Finalmente, se determina que:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

Demuestra que los puntos A(9;2), B(11;6), C(3;5) y D(1;1), son vértices de un paralelogramo.



Como los lados opuestos de un paralelogramos son paralelos, entonces se cumple:

$m_1 = m_3 = \frac{2-1}{9-1} = \frac{6-5}{11-3} = \frac{1}{8}$

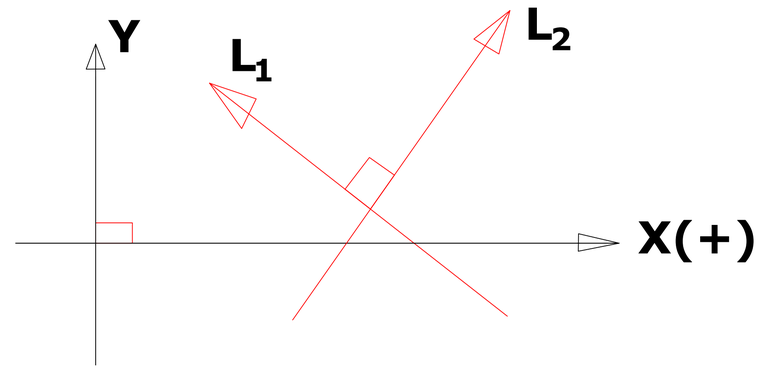
$m_2 = m_4 = \frac{5-1}{3-1} = \frac{6-2}{11-9} = 2$

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD

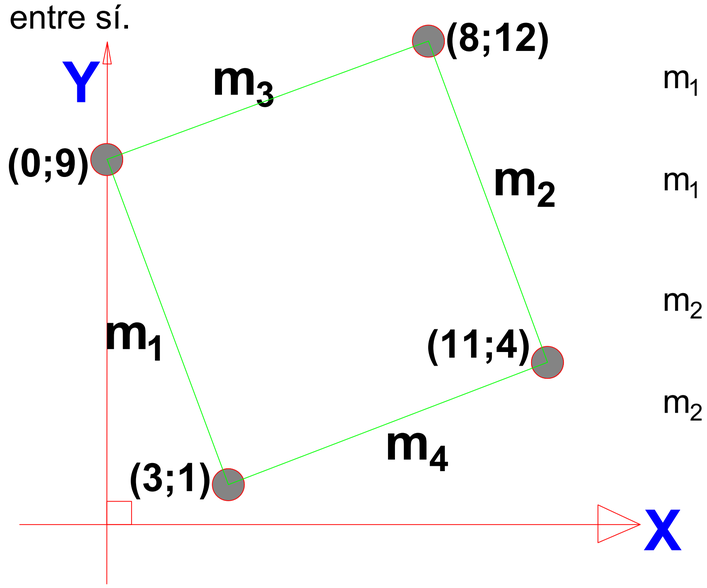
Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.
Si L1 es perpendicular a L2, es decir, las rectas forman un ángulo de 90°. Entonces:

$$m_1 . m_2 = -1$$

Por tanto: $m1 = \frac{-1}{m2}$ o $m2 = \frac{-1}{m1}$



Demuestra que los lados adyacentes del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntosA(0;9), B(3;1), C(11;4) y D(8;12), son perpendiculares entre sí.



$m_1 . m_3 = (\frac{9-1}{0-3})(\frac{12-9}{8-0}) = -1$

$m_1 . m_4 = (\frac{9-1}{0-3})(\frac{4-1}{11-3}) = -1$

$m_2 . m_3 = (\frac{12-4}{8-11})(\frac{12-9}{8-0}) = -1$

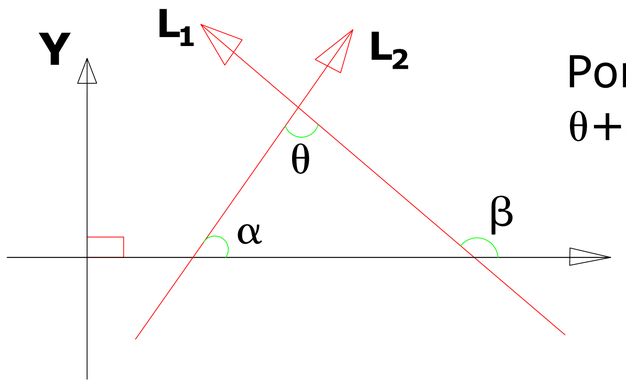
$m_2 . m_4 = (\frac{12-4}{8-11})(\frac{4-1}{11-3}) = -1$

Los lados son perpendiculares

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Para encontrar el ángulo θ formado por las rectas L1 y L2 se utiliza la fórmula:

$$\text{Tan}\theta = \frac{m1 - m2}{1 + m1.m2}$$



Por geometría:

$\theta+\alpha=\beta \Rightarrow \theta = \beta - \alpha$

Aplicando la tangente: $\text{Tan}\theta=\text{Tan}(\beta - \alpha)$

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{TanB} - \text{Tanx}}{1+\text{TanBTanx}} \; ; \; \text{Tan}(\beta)=m1; \; \text{Tan}(\alpha)=m2$$

Donde:

θ:Ángulo entre las rectas

m1:pendiente inicial de la recta L1

m2: Pendiente final de la recta L2

Se debe de tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contenido a las manecillas del reloj; en la recta que inicie el ángulo será la pendiente inicial y en la recta que termine la pendiente final.

ESTUDIO DE LA RECTA

Curvas de demanda lineal

Las ecuaciones lineales proporcionan representaciones razonablemente precisas de la demanda en un intevalo limitado.

En general, las ecuaciones de demanda lineales se utilizan para mayor simplificidad y claridad al ilustrar cierto tipo de análisis.

La ecuación de la recta indica situaciones que se presentan al realizar un análisis.

Por ejemplo:

Cuando el precio es de 80 unidades monetarias se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de 60 unidades monetarias. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

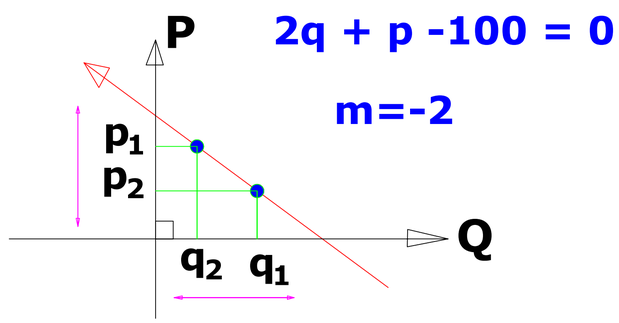
Datos:

$q1 = 10; \; p1 = 80; \; q2 = 20; \; p2 = 60; \; p-p1 = \frac{p2-p1}{q2-q1}(q - q1)$

Al sustituir los dados se obtiene la ecuación:

$$2q + p - 100 = 0$$

Este ejemplo indica que mientras la cantidad de demanda aumenta el precio disminuye.



DEFINICIÓN

La línea recta es el lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales al tomar dos cualesquiera, el valor de la pendiente es siempre es constante.

Ecuaciones de la recta
Para determinar la ecuación de una recta en función de las condiciones dadas, se emplean las siguientes ecuaciones según corresponda.

Ecuación General
Es aquella que se expresa de la siguiente manera:

$$Ax + By C = 0$$

Donde: A, B y C son constantes.

Ecuación punto - pendiente
Dado el punto $P_1(x_1;y_1)$ de la recta de pendiente m, su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos
Dados los puntos $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ de la recta, su ecuación es:

$$y - y1 = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}(x - x_1)$$

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Conocidas las condiciones que determinan una recta o su ecuación, éstas se expresan de las siguientes formas:

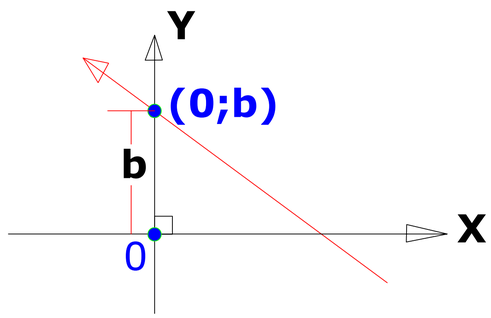
Ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen (forma ordinaria o reducida)

Una vez que se conoce la pendiente de una recta y su ordenada al origen (intersección con el eje Y), se determina la siguiente ecuación:

$$y = mx + b$$

Donde, m: pendiente
b: ordenada al origen

Esta forma de la ecuación de la recta, también se conoce como forma simplificada o reducida.



Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Para transformar Ax + By + C = 0, a la forma y = mx + b, se procede de la siguiente manera:

Se despeja la variable y de: Ax + By + c = 0

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación de la forma pendiente - ordenada al origen.

Si se compara con la ecuación y = mx + b se obtiene los valores de m y b, en términos de los coeficientes de la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Ecuación de la recta en su forma simétrica

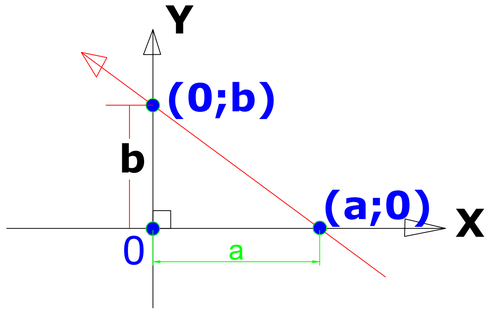
Una recta cuyas intersecciones con los ejes X e Y son a y b con a y b diferentes de cero se representa por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Donde:

a: abscisa al origen(Representa la intersección con el eje X)

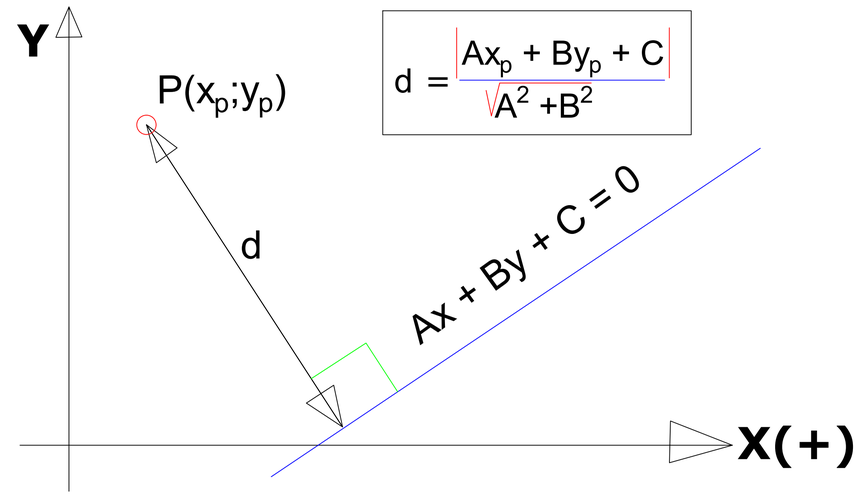
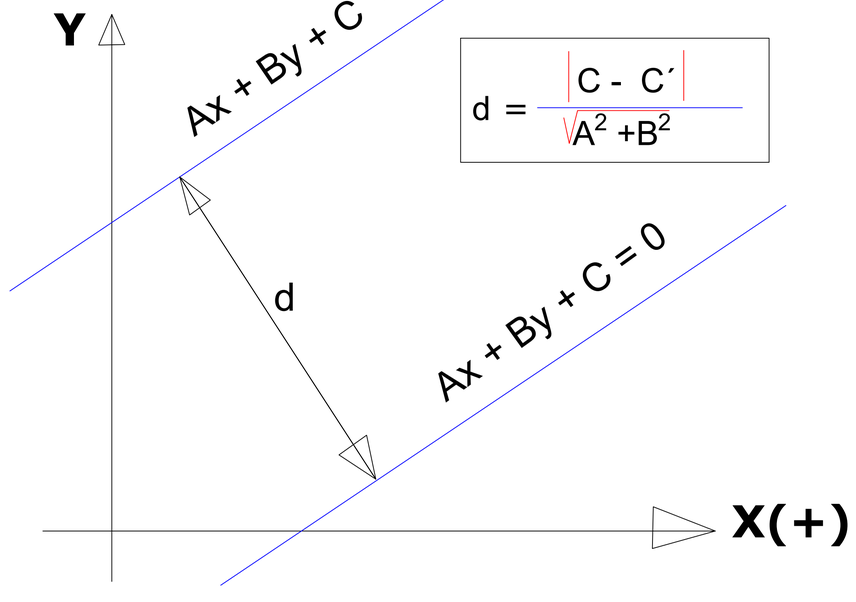
b: Ordenada al origen (Representa la intersección con el eje Y)



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del plano.

La distancia del punto $P(x_p;y_p)$ a la recta Ax + By + C = 0, está determinada por la fórmula:



DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS