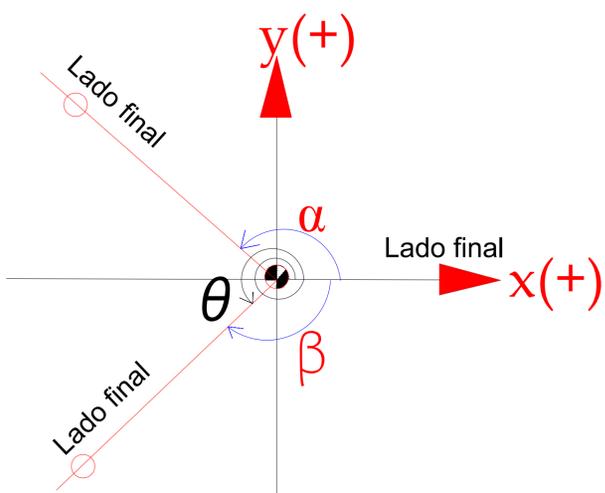


### ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

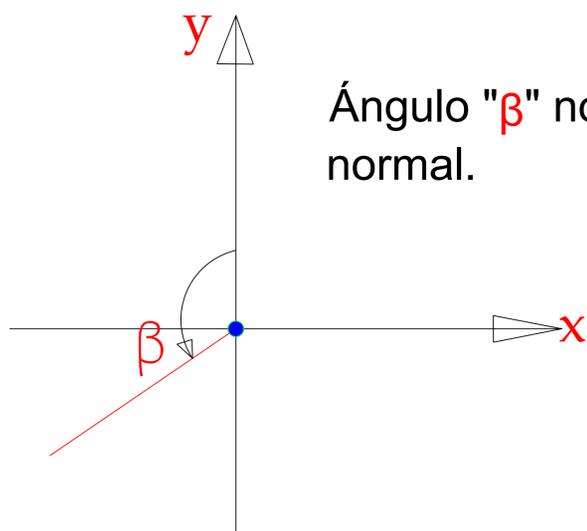
Es aquel ángulo trigonométrico ubicado sobre el plano cartesiano, en donde su vértice coincide con el origen de coordenadas, su lado inicial está contenido en el semieje positivo de las abscisas y el lado final está sobre cualquier cuadrante o sobre algún semieje.

El ángulo en posición normal es conocido también como ángulo estándar o ángulo en posición canónica.



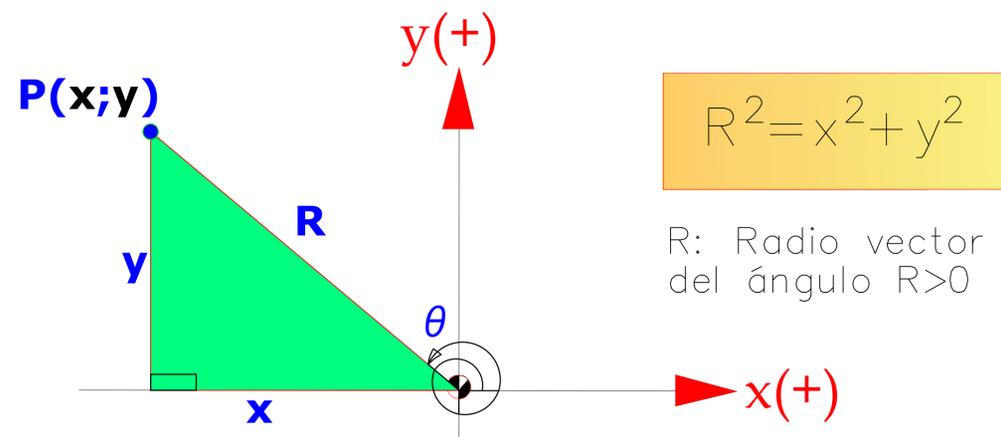
Ángulos en posición normal:

- $\alpha > 0 \wedge \alpha \in \text{IIC}$
- $\beta < 0 \wedge \beta \in \text{IIIC}$
- $\theta > 0 \wedge \theta \in \text{IIIC}$



### DEFICINIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para determinar el valor de las R.T. de un ángulo en posición normal(  $\theta$  ), tomaremos un punto P(x;y) perteneciente a su lado final.



$$\text{Sen}\theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio vector}} = \frac{y}{R}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio vector}} = \frac{x}{R}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x}$$

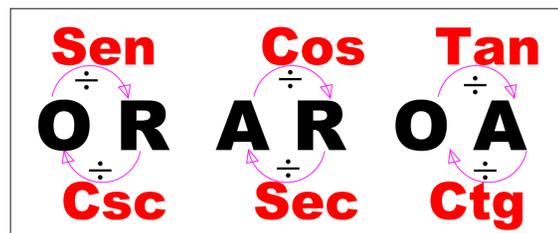
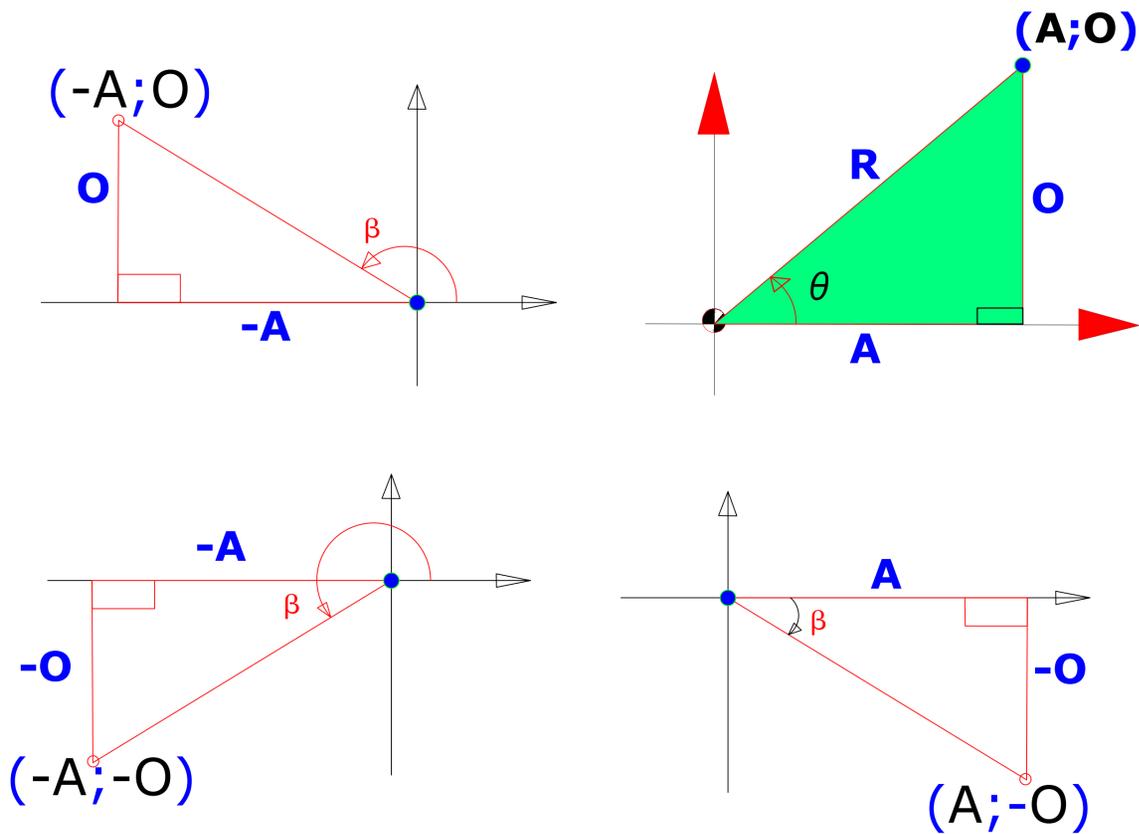
x: Abscisa del ángulo  
y: Ordenada del ángulo

$$\text{Ctg}\theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y}$$

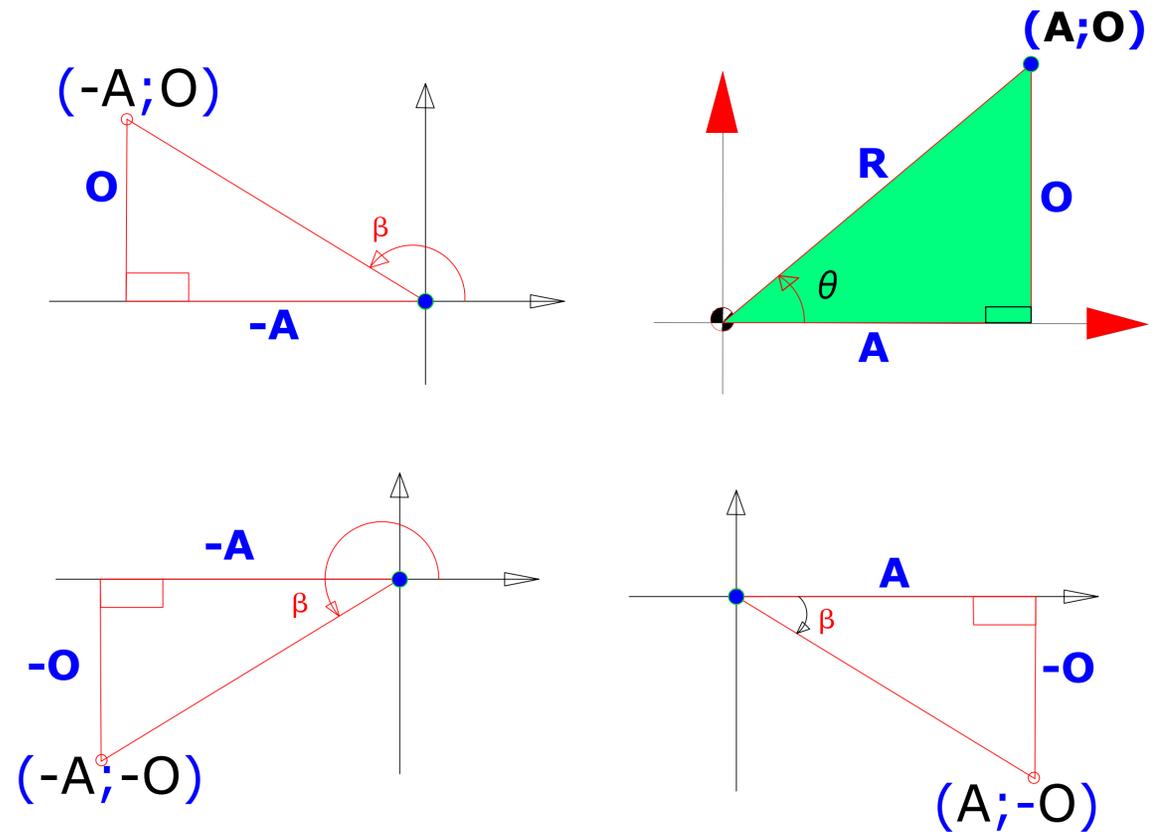
$$\text{Sec}\theta = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{R}{x}$$

$$\text{Csc}\theta = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{R}{y}$$

MNEMOTECNIA

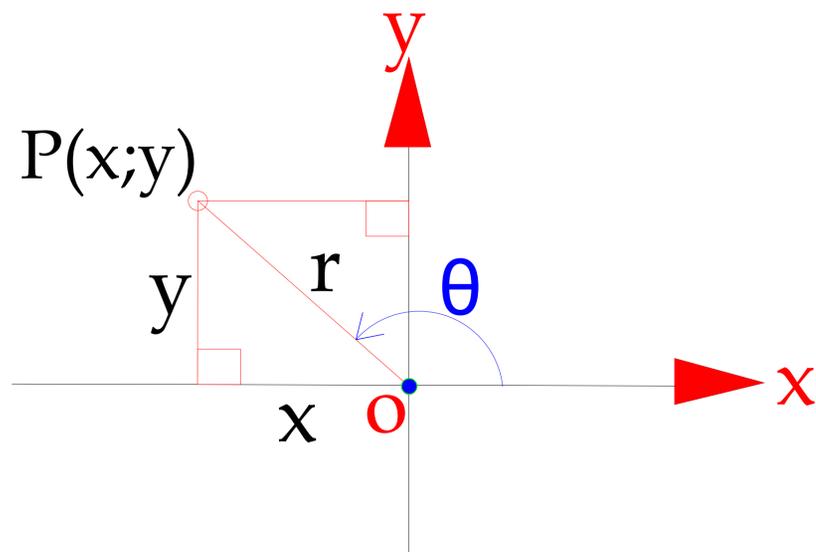


**A: Abscisa**  
**O: Ordenada**  
**R: Radio vector**



$$R^2 = (A)^2 + (O)^2$$

**RADIO VECTOR Y LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**



$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

x: Abscisa del ángulo  
 y: Ordenada del ángulo  
 r: Radio vector del ángulo  $r > 0$

**R.T.de ángulo Theta:**

$$\text{Sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \text{Csc}\theta = \frac{r}{y}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{Sec}\theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{Ctg}\theta = \frac{x}{y}$$

**APLICACIÓN**

Sea  $\alpha$  un ángulo en posición normal tal que un punto de su lado final es  $(-5 ; -12)$ . Hallar las razones trigonométricas de  $\alpha$ .

**MÉTODO (1) sin graficar**

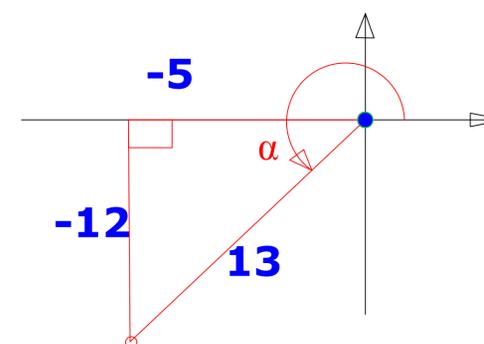
A: Abscisa = -5  
 O: Ordenada = -12  
 R: Radio vector = 13

$$r^2 = (-5)^2 + (-12)^2$$

$$r = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$\text{Sen } \alpha = \frac{-12}{13}$	$\text{Csc } \alpha = \frac{13}{-12}$
$\text{Cos } \alpha = \frac{-5}{13}$	$\text{Sec } \alpha = \frac{13}{-5}$
$\text{Tan } \alpha = \frac{-12}{-5}$	$\text{Ctg } \alpha = \frac{-5}{-12}$

**MÉTODO (2) graficando**

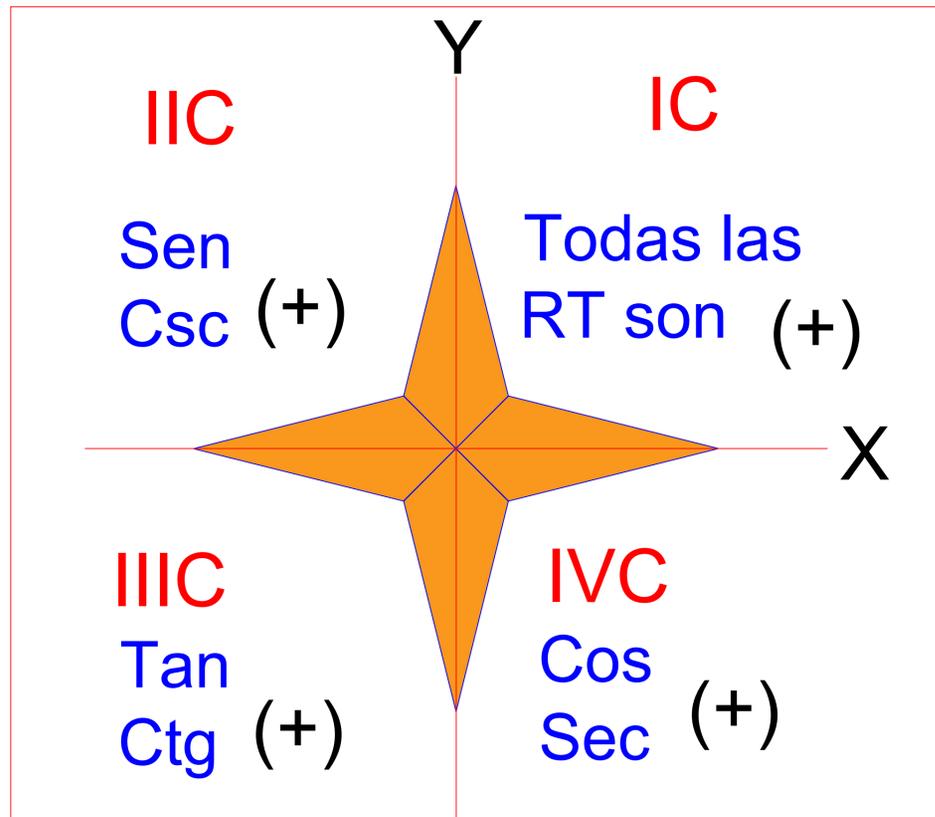


**A partir de la gráfica:**

$\text{Sen } \alpha = \frac{-12}{13}$	$\text{Csc } \alpha = \frac{13}{-12}$
$\text{Cos } \alpha = \frac{-5}{13}$	$\text{Sec } \alpha = \frac{13}{-5}$
$\text{Tan } \alpha = \frac{-12}{-5}$	$\text{Ctg } \alpha = \frac{-5}{-12}$

Podemos observar del ejemplo anterior que las razones trigonométricas pueden ser positivas o negativas, esto se debe a que las razones trigonométricas dependen de la abscisa y la ordenada y estos valores pueden ser positivos o negativos. (No olvidar que el radio vector es positivo).

**SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**



Razones \ Cuadrantes	IC	IIC	IIVC	IVC
Sen y Csc	+	+	-	-
Cos y Sec	+	-	-	+
Tan y Ctg	+	-	+	-

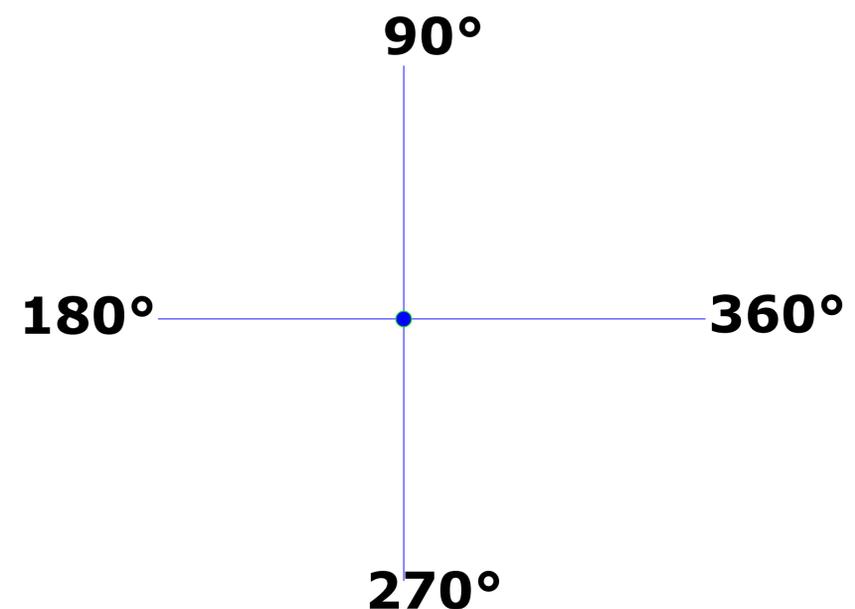
**ÁNGULOS CUADRANTALES**

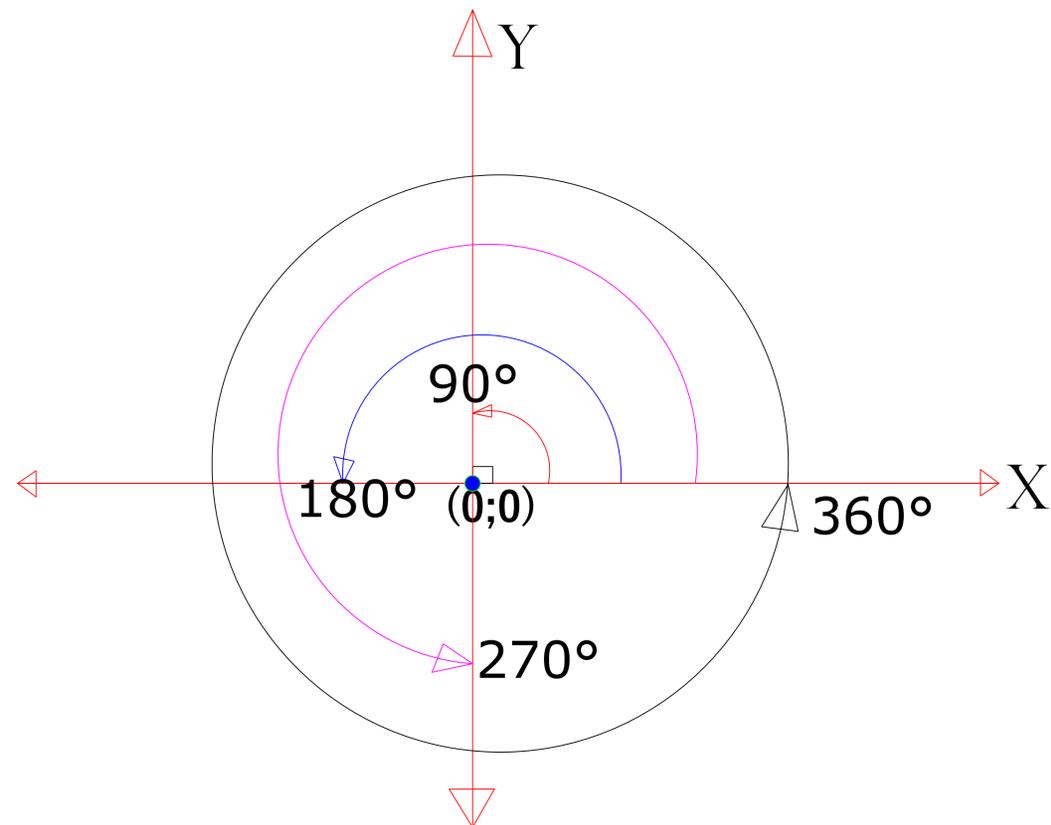
Son aquellos ángulos en posición normal cuyo lado final pertenece a alguno de los semiejes del sistema de coordenadas rectangulares.

En las figuras siguientes se muestran algunos ángulos cuadrantales.

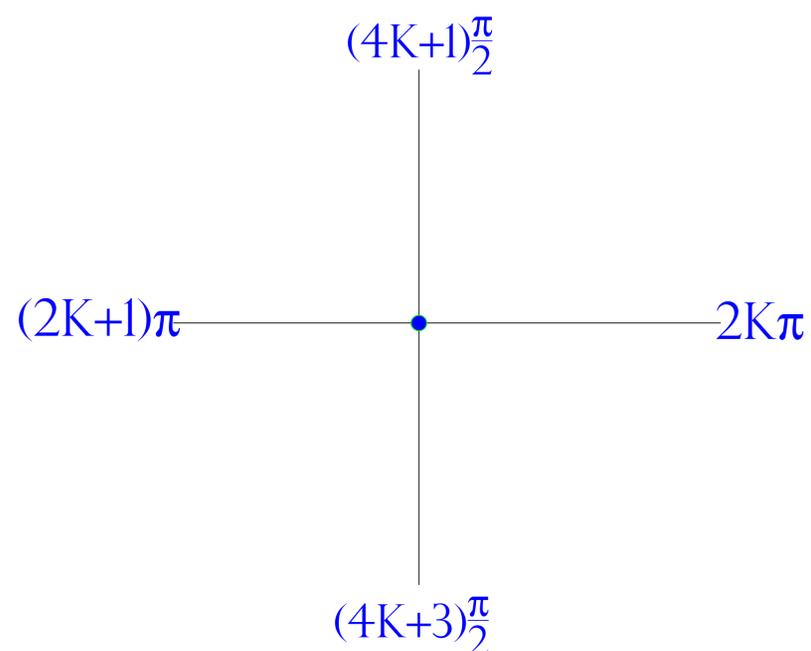
Características:

1. Un ángulo cuadrantal no pertenece a ningún cuadrante
2. Los ángulos cuadrantales son múltiplos de  $90^\circ (90k)$   $0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ; 450^\circ; 540^\circ; 630^\circ; 720^\circ; \dots$
3. Se deduce que para determinar si un ángulo es cuadrantal se debe dividir a dicho ángulo entre  $90^\circ$  y solo si el resultado es un número entero entonces será ángulo cuadrantal.





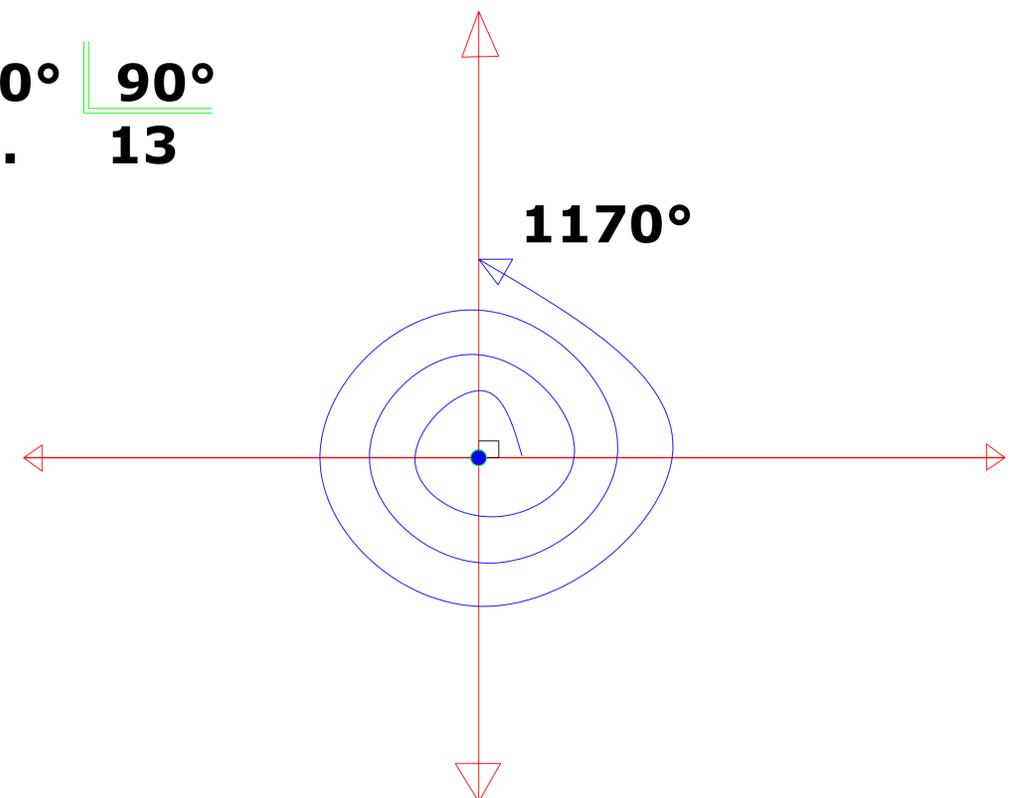
En forma general la ubicación de un ángulo (en el sistema radial) se determina así: ( $k \in \mathbb{Z}$ )



Si un ángulo mide  $1170^\circ$  ¿Es ángulo cuadrantal?

La respuesta es sí porque  $\frac{1170^\circ}{90^\circ}$  es igual a 13 (número entero).

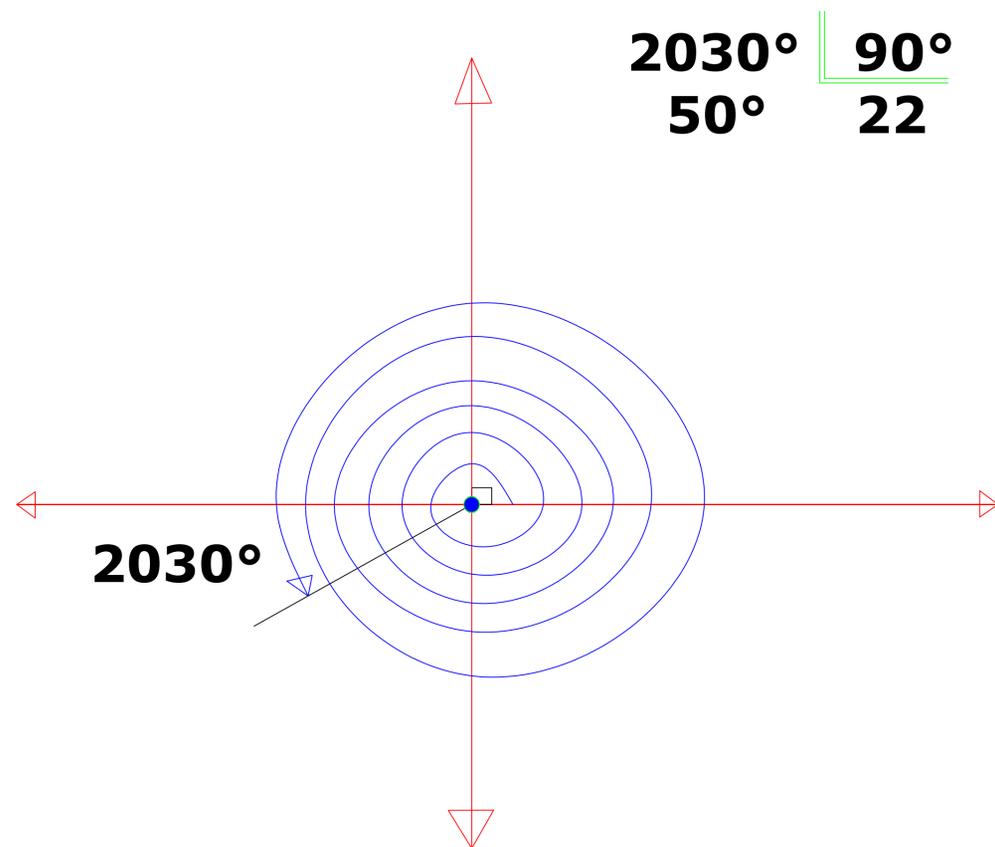
$$\begin{array}{l} 1170^\circ \quad | \quad 90^\circ \\ \dots\dots \quad | \quad 13 \end{array}$$



👍 Rta:  $1170^\circ$  es cuadrantal

Y si un ángulo mide  $2030^\circ$  ¿Es ángulo cuadrantal?

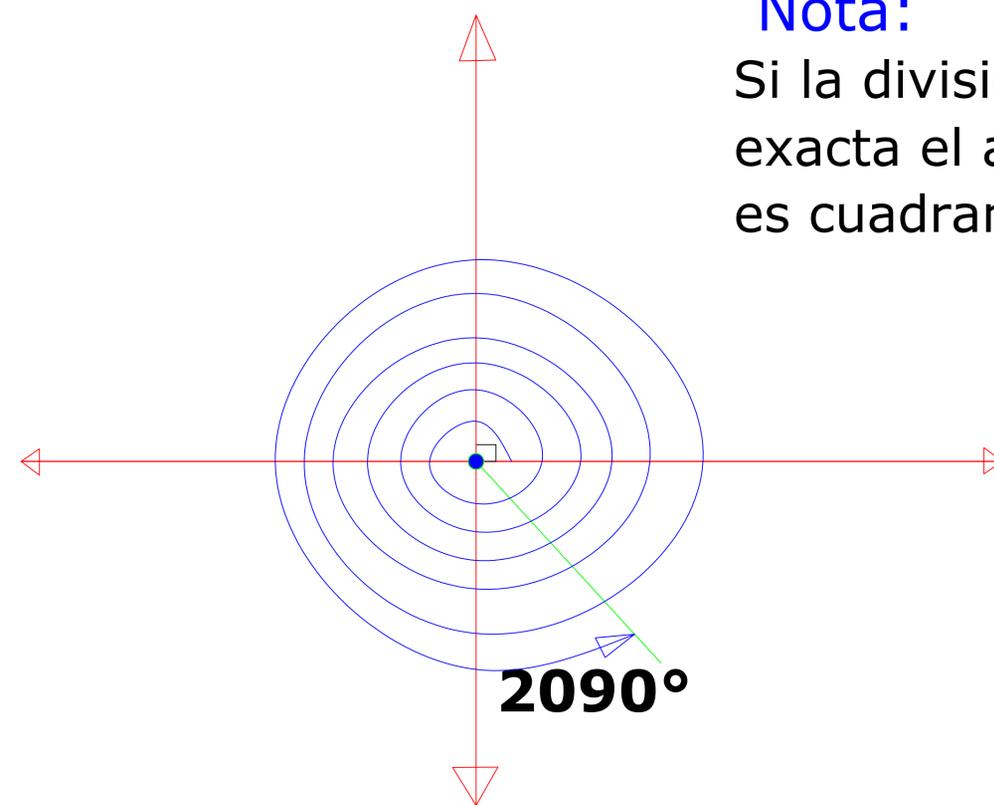
La respuesta es no porque  $\frac{2030^\circ}{90^\circ}$  no da como resultado un número entero.



👍 Rta:  $2030^\circ$  no es cuadrantal

¿El ángulo  $2090^\circ$  es cuadrantal?

$$\begin{array}{l} 2090^\circ \begin{array}{l} 90^\circ \\ 2070^\circ \end{array} \\ \quad \begin{array}{l} 20^\circ \end{array} \end{array}$$



**Nota:**  
Si la división es exacta el ángulo es cuadrantal

👍 Rta:  $2090^\circ$  no es cuadrantal

Para determinar el cuadrante al que pertenece un ángulo se presentan tres casos.

**Caso I:** Si el ángulo es positivo y menor de una vuelta. En este caso es muy fácil determinar a qué cuadrante pertenece un ángulo, por ejemplo:

- $120^\circ \in \text{IIC}$
- $240^\circ \in \text{IIIC}$
- $330^\circ \in \text{IVC}$

**Caso II:** Si el ángulo es positivo y mayor de una vuelta.

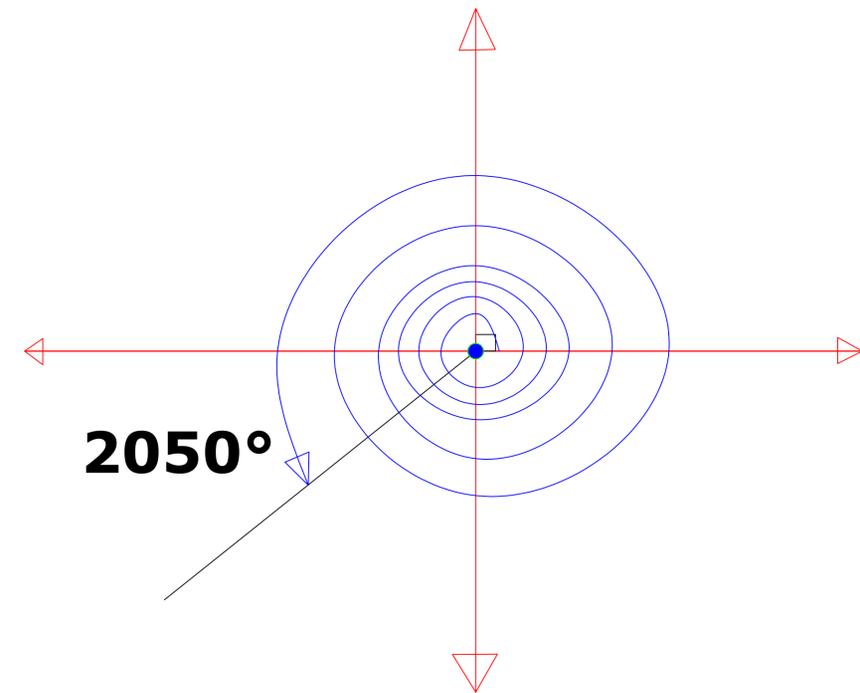
En este caso se divide al ángulo entre  $360^\circ$ , luego se analiza el residuo de la división como en el caso anterior, por ejemplo:

¿A qué cuadrante pertenece 2050?

$$\begin{array}{r} 2050^\circ \\ 1800^\circ \\ \hline 250^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} 360^\circ \\ 5 \end{array} \Rightarrow \text{Residuo} = 250^\circ$$

$250^\circ \in \text{IIIC} \Rightarrow 2050^\circ \in \text{IIIC}$

Nota: El residuo  $250^\circ$  determina el cuadrante del ángulo dado.



👍 Rta:  $2050^\circ \in \text{IIIC}$

**Caso III:** Si el ángulo es negativo. En este caso una forma de trabajar es sumando  $360^\circ$  al ángulo o al residuo depende del caso, por ejemplo:

$-20^\circ: -20 + 360^\circ = 340^\circ \in \text{IVC} \Rightarrow -20^\circ \in \text{IVC}$

$-1850^\circ:$

$$\begin{array}{r} -1850^\circ \\ 360^\circ \\ \hline -50^\circ \end{array} \Rightarrow -50^\circ + 360^\circ = 310^\circ \in \text{IVC}$$

$-50^\circ$

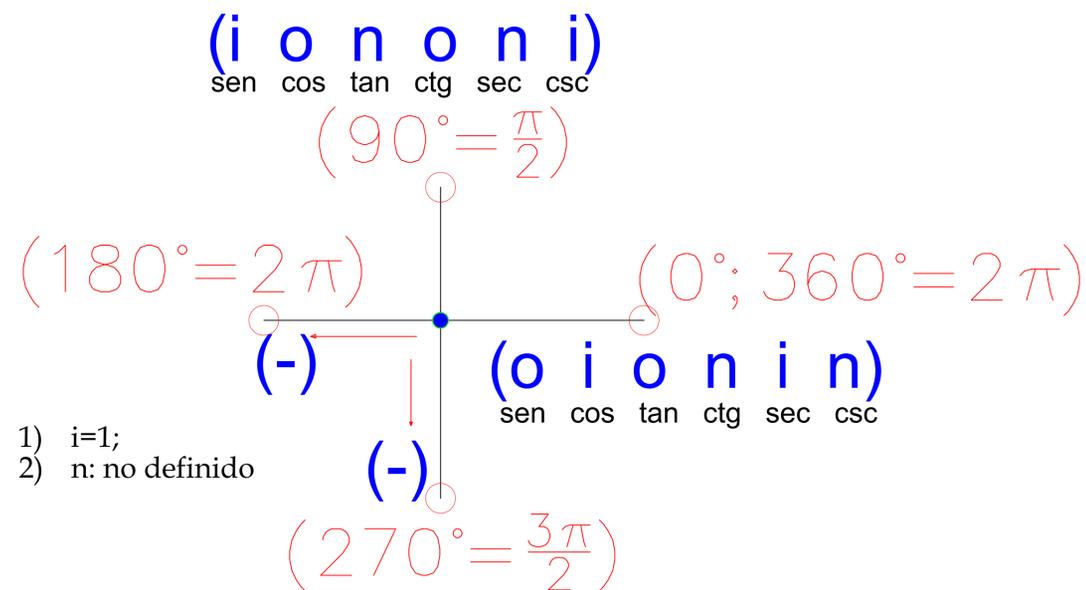
$\Rightarrow -1850^\circ \in \text{IVC}$

RT DE ÁNGULOS CUADRANTALES

R.T \ $\angle$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tan	0	N	0	N	0
Ctg	N	0	N	0	N
Sec	1	N	-1	N	1
Csc	N	1	N	-1	N

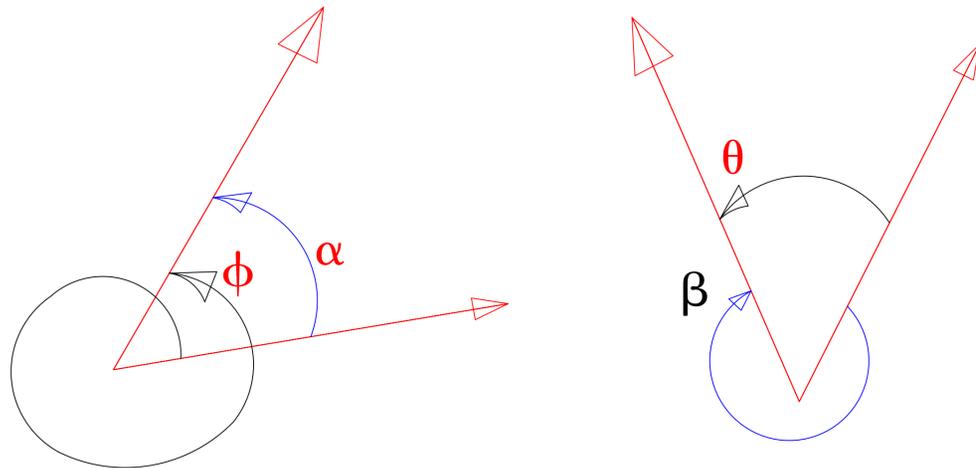
Donde: N significa no definido

Mnemotecnia:



## ÁNGULOS COTERMINALES

Se denomina de esta manera a todos aquellos ángulos que tienen los mismos elementos (vértice, lado inicial y lado final). En las figuras adjuntas  $\alpha$  y  $\phi$  son ángulos coterminales, lo mismo que  $\beta$  y  $\theta$



Una característica fundamental de los ángulos coterminales es que se diferencian en un número entero de vueltas.

Si  $\alpha$  y  $\theta$  son dos ángulos coterminales, se cumple:

$$\phi - \alpha = (360^\circ)k = (2\pi\text{rad})k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

En forma práctica para determinar si dos ángulos son coterminales:

1. Restamos dichos ángulos
2. Dividimos la diferencia entre  $360^\circ$  o  $2\pi\text{rad}$
3. Si el resultado es un número entero entonces los ángulos son coterminales.

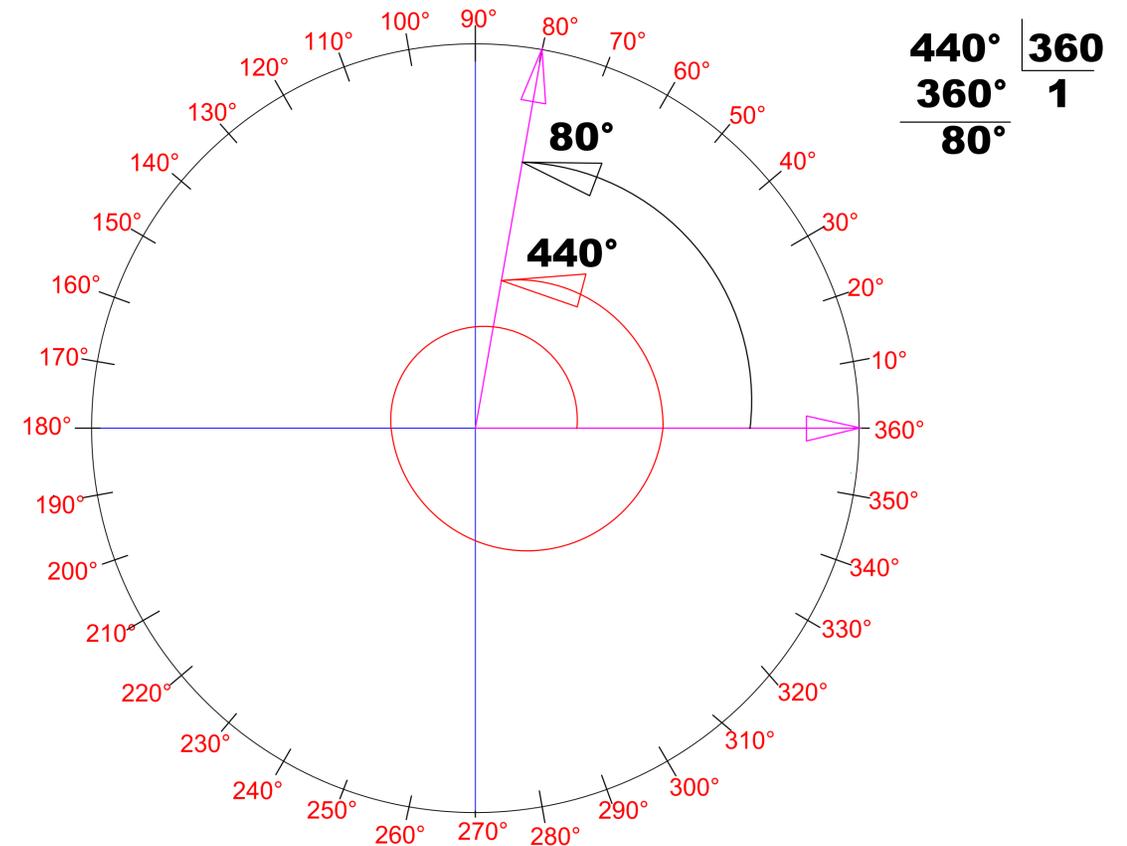
¿  $80^\circ$  y  $440^\circ$  son coterminales?

### RESOLUCIÓN

Primero:  $80^\circ - 440^\circ = -360^\circ$

Segundo:  $-360^\circ$  entre  $360^\circ$  es igual a  $-1$

Conclusión. Los ángulos  $80^\circ$  y  $440^\circ$  son coterminales



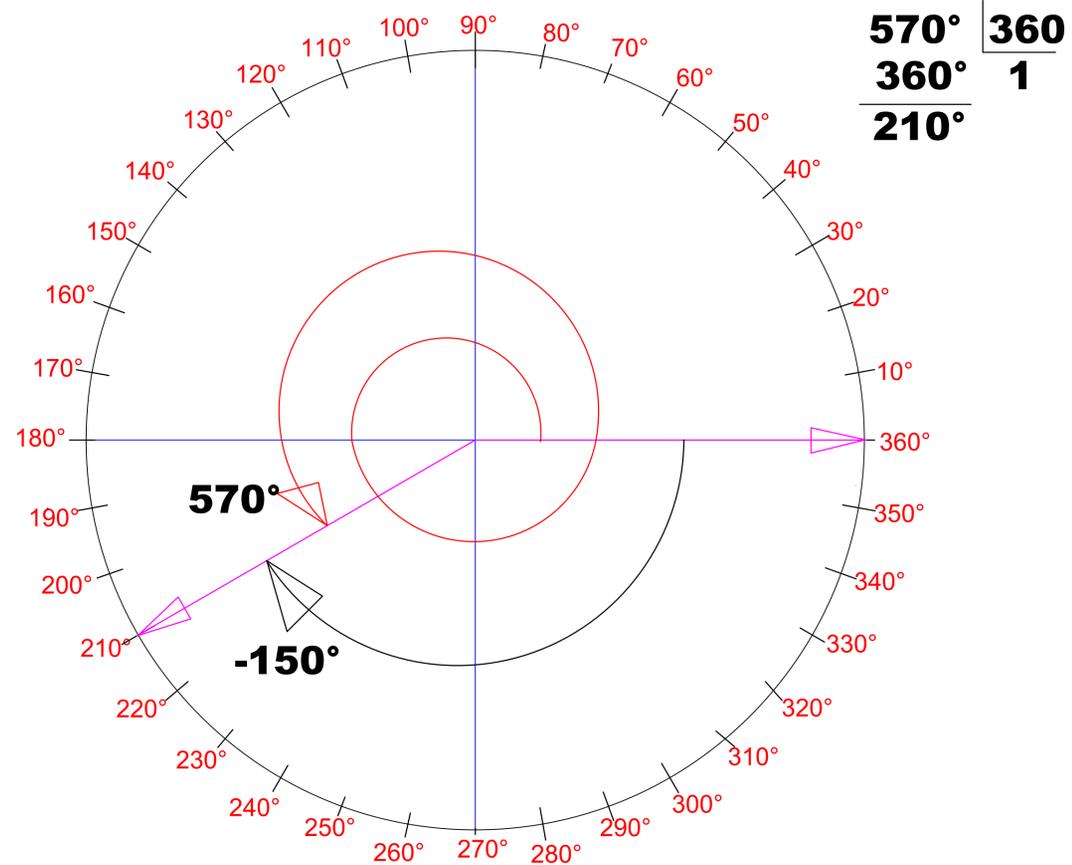
¿-150° y 570° son coterminales?

## RESOLUCIÓN

Primero:  $-150^\circ - 570^\circ = -720^\circ$

Segundo:  $-720^\circ$  entre  $360^\circ$  es igual a  $-2$

Conclusión. Los ángulos  $-150^\circ$  y  $570^\circ$  son coterminales



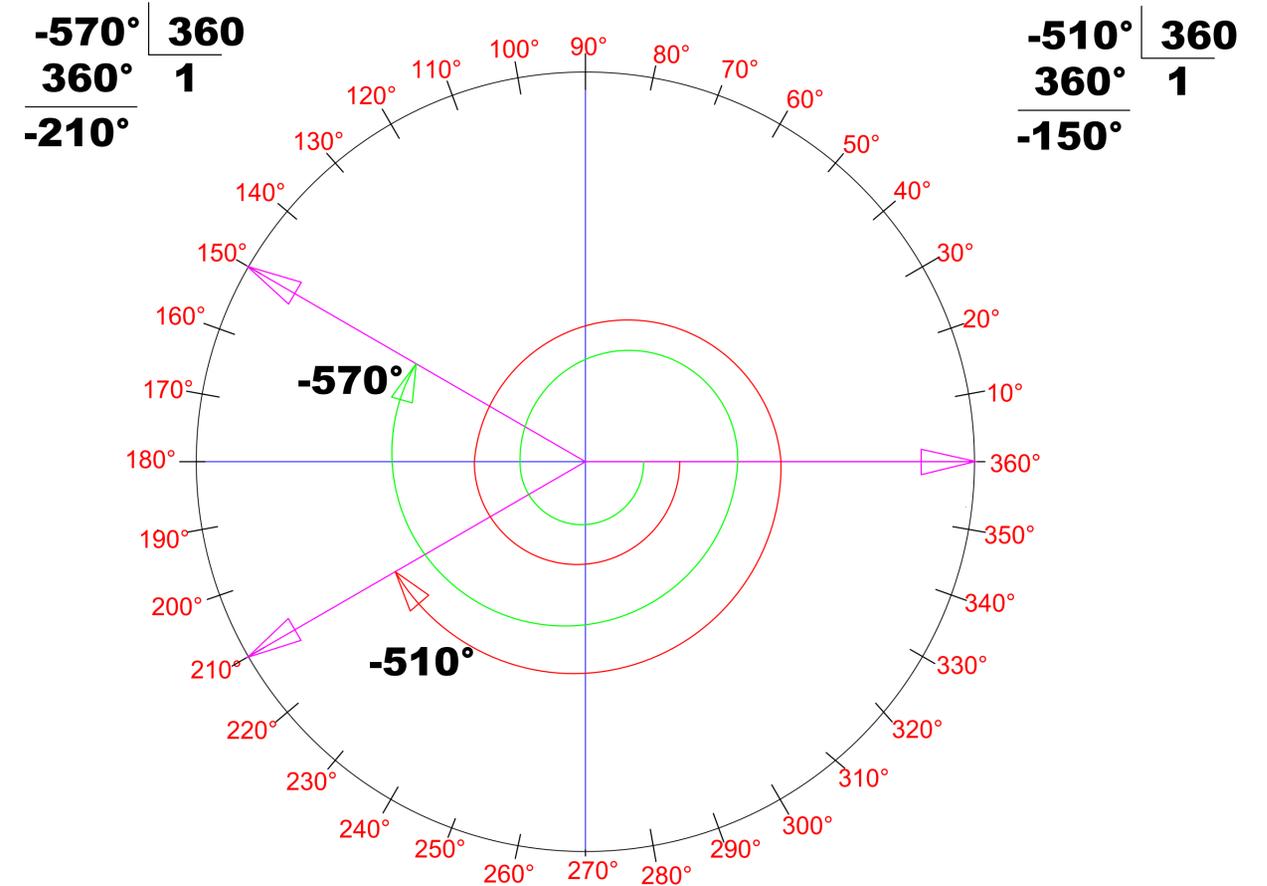
¿-750° y -510° son coterminales?

## RESOLUCIÓN

Primero:  $-750^\circ - (-510^\circ) = -240^\circ$

Segundo:  $-240^\circ$  entre  $360^\circ$  es igual a  $-2/3$

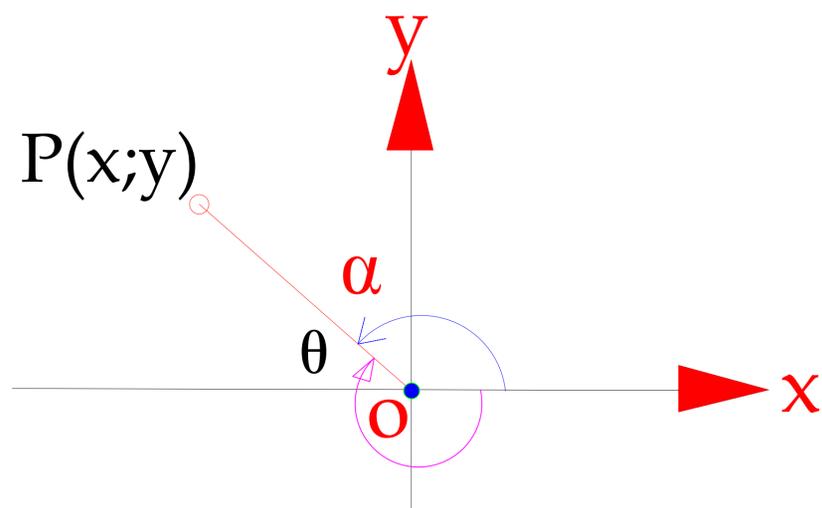
Conclusión. Los ángulos  $-750^\circ$  y  $-510^\circ$  NO son coterminales



**PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS COTERMINALES**

**Propiedad uno:**

Las razones trigonométricas de dos o más ángulos coterminales son respectivamente iguales.

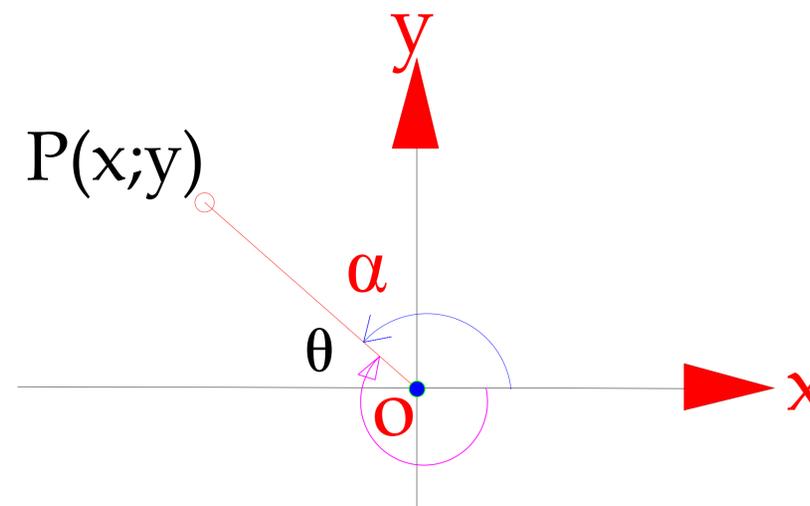


$$\begin{aligned} \text{Sen}\theta &= \text{Sen}\alpha \\ \text{Cos}\theta &= \text{Cos}\alpha \\ \text{Tan}\theta &= \text{Tan}\alpha \\ \text{Ctg}\theta &= \text{Ctg}\alpha \\ \text{Sec}\theta &= \text{Sec}\alpha \\ \text{Csc}\theta &= \text{Csc}\alpha \end{aligned}$$

$$\text{RT}(\theta) = \text{RT}(\alpha)$$

**Propiedad dos:**

La diferencia de ángulos coterminales es múltiplo de 360°



De la gráfica:

$$\alpha - \theta = 360^\circ k \Rightarrow \alpha = 360^\circ k + \theta$$

Reemplazando en la primera propiedad:

$$\text{RT}(\theta) = \text{RT}(\alpha)$$

Tenemos:

$$\Rightarrow \text{RT}(\theta) = \text{RT}(360^\circ k + \theta)$$

$$\Rightarrow \text{Sen}(20^\circ) = \text{Sen}(360^\circ k + 20^\circ)$$

$$\text{Si: } k=1 \Rightarrow \text{Sen}(20^\circ) = \text{Sen}(380^\circ)$$

$$\text{Si: } k=2 \Rightarrow \text{Sen}(20^\circ) = \text{Sen}(740^\circ)$$

$$\text{Si: } k=3 \Rightarrow \text{Sen}(20^\circ) = \text{Sen}(1100^\circ)$$

$$\text{Si: } k=-1 \Rightarrow \text{Sen}(20^\circ) = \text{Sen}(-340^\circ)$$

**APLICACIÓN**

Dos ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  son coterminales y además complementarios. Hallar la medida del ángulo  $\alpha$  si  $200^\circ < \alpha < 300^\circ$ .

**RESOLUCIÓN**

$$\alpha - \theta = 360^\circ K \dots\dots\dots(1)$$

$$\alpha + \theta = 90^\circ \dots\dots\dots(2)$$

Sumando (1) y (2)

$$\alpha = 180k + 45^\circ$$

$$k=0 \text{ entonces } \alpha = 45^\circ$$

$$k=1 \text{ entonces } \alpha = 225^\circ$$

$$k=2 \text{ entonces } \alpha = 405^\circ$$

Por dato  $200^\circ < \alpha < 300^\circ$

Entonces de los valores obtenidos el único que satisface la desigualdad es  $\alpha = 225^\circ$

**LECTURA: INGENIERÍA CIVIL**

La ingeniería civil está en todas partes, es incluso tan antigua como el hombre mismo, es una ciencia que surgió para satisfacer las necesidades de desarrollo y protección como creación de vivienda, caminos y diferentes establecimientos.

Un ingeniero civil es un profesional capaz de planear, diseñar, organizar, desarrollar y construir, obras civiles para mejorar el nivel de vida y bienestar económico y social sustentado en la conservación del medio ambiente.

El ingeniero civil, participa en la construcción de obras, desde la planeación, diseño y organización hasta la supervisión del proyecto.

Proyectos como las edificaciones, puentes, represas, carreteras o cualquier otro tipo de construcción en los que también selecciona y maneja sistemas de información y control para la administración de obras.